

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ СОУДАРЕНИЙ ЧАСТИЦ ВИБРОСМЕСИ

The group of the mass particles is considered. It is proposed that the particles put in order along vertical line, but their centers may have a horizontal shift; the near particles are struck and rush up by means of vertical vibration of the base plane, gravity and aerodynamic resistance.

Вибрационная обработка поверхности деталей в вибробункере свободным абразивом происходит за счет микроударов, проскальзывания, обкатывания со стороны окружающих деталь абразивных гранул. Основными показателями эффективности процесса обработки являются интенсивность съема материала с поверхности детали (масса отделяемого материала с единицы площади в единицу времени), равномерность съема, а также износостойкость абразивных гранул как рабочего инструмента. Мерой равномерности съема материала могут служить параметры статистического распределения отделенных частиц материала по их размерам: чем меньше генеральная средняя и генеральная дисперсия размеров частиц, тем выше качество и равномернее обработка поверхности. Мерой износостойкости абразивных гранул естественно считать общую массу отделенных частиц износа абразива в единицу времени на единицу объема.

В целом процесс вибрационной обработки является стохастическим, не представляется возможным описать все перемещения и столкновения деталей и гранул в рамках какой-либо детерминированной модели. Тем не менее некоторые его интегральные характеристики, в частности съем материала с поверхности детали, в первом приближении можно считать почти периодическими. Причина состоит в том, что съем материала происходит в зонах соприкосновения микроскопических неровностей поверхностей обрабатываемой детали и окружающих ее со всех сторон абразивных гранул (для краткости эти зоны часто называют просто – контактами [1]). В среднем за каждый период колебаний один раз происходит разрыхление окружающих деталь гранул с последующим уплотнением, во время которого и осуществляется основной съем материала за счет соударений и проскальзывания в контактах.

Особый интерес представляет определение неслучайных интегральных характеристик процесса вибрационной обработки, а также их зависимости от задаваемых параметров процесса и влияния на его эффективность. В качестве одной из таких характеристик может служить так называемая «длина свободного пробега» – среднее за период расстояние, проходимое гранулой. «Длина свободного пробега» характеризует степень разрыхленности рабочей среды, ее внутреннюю кинетическую энергию, а значит, и съем материала с поверхности.

В работе [2] рассматривалась линейная модель взаимодействия гранул. Предполагалось, что гранулы образуют линейные вертикальные ансамбли материальных частиц, перемещение частиц в ансамбле происходит под действием сил тяжести, аэродинамического сопротивления и за счет соударений соседних частиц. Удар считался прямым, упруго-пластичным и характеризовался коэффициентом восстановления. В работе [3] была рассмотрена «плоская модель», в которой горизонтальные смещения частиц при соударениях учитывались через эффективный коэффициент восстановления.

В данной работе также используется эффективный коэффициент восстановления, но рассчитывается он уже с учетом объемных соударений. Рассмотрим группу из n материальных частиц M_1, M_2, \dots, M_n , расположенных на вертикальной прямой, одна над другой,

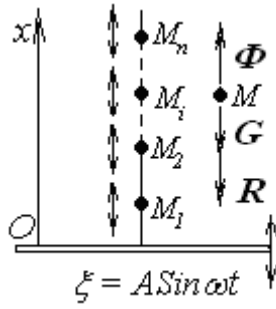


Рис. 1. Силы, действующие на частицы «линейного

ансамбля». В относительном движении на каждую частицу ансамбля действуют: сила тяжести G_k , переносная сила инерции Φ_k и сила аэродинамического сопротивления R_k . По величине эти силы представляются в виде:

$$G_k = m_k g, \quad \Phi_k = m_k A \omega^2 \sin \omega t, \quad R_k = a_k v_k, \quad (1)$$

где m_k, a_k, v_k – масса частицы, ее индивидуальный коэффициент сопротивления и относительная скорость ($k = 1, \dots, n$); A, ω – амплитуда и частота вибраций толкателя; t – время.

При соударении соседних частиц с номерами k и $k-1$, а также нижней частицы с дном изменение относительных скоростей характеризуется коэффициентами восстановления λ_k ($k = 1, \dots, n$), так что

$$v_{k,x}^p - v_{k-1,x}^p = -\lambda_k (v_{k,x}^b - v_{k-1,x}^b), \quad (2)$$

где $v_{k,x}^b$ – скорость частицы непосредственно перед соударением; $v_{k,x}^p$ – скорость частицы сразу после соударения (в проекции на ось Ox); $v_{0,x}^b = v_{0,x}^p = 0$. Кроме того, в момент соударения

$$x_k = x_{k-1} \quad (k = 1, \dots, n), \quad x_0 \equiv 0. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение движения для каждой частицы имеет вид в проекции на ось Ox :

$$m_k \ddot{x}_k = -m_k g + m_k A \omega^2 \sin \omega t - \alpha_k \dot{x}_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4)$$

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = \omega t, \quad \tilde{x}_k = \frac{x_k}{A}, \quad \tilde{x}'_k = \frac{d\tilde{x}_k}{d\tau} = \frac{\dot{x}_k}{A \cdot \omega}, \quad \tilde{x}''_k = \frac{d^2 \tilde{x}_k}{d\tau^2} = \frac{\ddot{x}_k}{A \cdot \omega^2}, \quad \tilde{\alpha}_k = \frac{\alpha_k}{m_k \cdot \omega}.$$

Тогда уравнения (4) запишутся в виде (далее «волну» над безразмерными переменными для краткости записи опускаем):

$$\tilde{x}''_k = -z + \sin \tau - \tilde{\alpha}_k \tilde{x}'_k, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, в результате получим:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_k &= \left(v_{k,x_j}^p + \frac{z}{\alpha_k} + \frac{\cos(\tau_{k_j} + \delta_k)}{\sqrt{1 + \alpha_k^2}} \right) \exp(-\alpha_k(\tau - \tau_{k_j})) - \frac{z}{\alpha_k} - \frac{\cos(\tau + \delta_k)}{\sqrt{1 + \alpha_k^2}}, \\ x_k &= \frac{1}{\alpha_k} \left(v_{k,x_j}^p + \frac{z}{\alpha_k} + \frac{\cos(\tau_{k_j} + \delta_k)}{\sqrt{1 + \alpha_k^2}} \right) (1 - \exp(-\alpha_k(\tau - \tau_{k_j}))) - \\ &- \frac{z}{\alpha_k} (\tau - \tau_{k_j}) - \frac{\sin(\tau + \delta_k) - \sin(\tau_{k_j} + \delta_k)}{\sqrt{1 + \alpha_k^2}} + x_{k_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

где x_{kj}, v_{kj}^p – координата и скорость точки в момент τ_{kj} сразу после соударения; $\delta_k = \arctg \alpha_k$, ($k=1, \dots, n$).

Прямой анализ уравнений (6) усложняется тем, что моменты соударений τ_{kj} заранее неизвестны и определяются из равенства координат соседних частиц (3), причем момент τ_{kj} последующего соударения частиц можно рассчитать только после определения момента $\tau_{k,j-1}$ предыдущего соударения. В связи с этим возникает необходимость использовать численные методы решения. Несложный подсчет объема вычислений показывает, что для линейного ансамбля из n частиц имеем $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, вытекающих из (5) (в случае интегрируемости они эквивалентны зависимостям типа (6)) и n условий соударений частиц (3). В общем случае трехмерного движения количество дифференциальных уравнений и дополнительных условий существенно возрастают: для n частиц имеем систему из $6n$ дифференциальных уравнений и $\frac{n(n+1)}{2}$ условий-равенств (условия непроницаемости стенок бункера и условия соударения каждой пары частиц). При $n > 100$ такую задачу решить становится практически невозможно. В связи с этим возникает необходимость свести трехмерную задачу к одномерной.

Для обобщения рассмотренной одномерной модели взаимодействия частиц будем считать, что бункер заполнен одинаковыми сферическими частицами и также подвергается поступательным вертикальным вибрациям. Частицы перемещаются слоями: для оценки вертикальных составляющих перемещений выделим столбец (рис. 2) и будем рассматривать соударения частиц в данном столбце. При этом считаем, что если какая-нибудь частица покидает данный столбец, то она обязательно заменяется другой частицей с такой же вертикальной составляющей скорости.

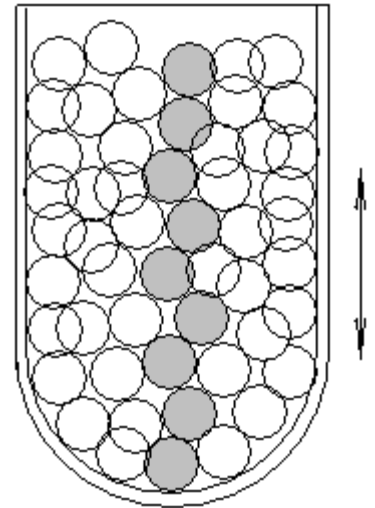


Рис. 2. Схема выделенного столбца соударяющихся частиц.

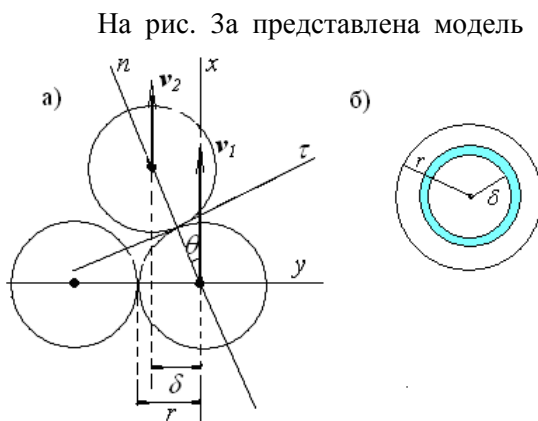


Рис. 3. Схема соударения сферических частиц.

На рис. 3а представлена модель случайного соударения частиц в столбце. Отклонение общей нормали n поверхностей соударяющихся частиц от вертикали на угол θ возникает из-за горизонтального смещения центров частиц на случайную величину δ . Ввиду горизонтального окружения сферической частицы другими частицами слоя ее соударение с частицей верхнего слоя может произойти лишь в окрестности вершины, имеющей форму круга радиуса r (точнее, близкую к форме круга радиуса r , рис. 3б); при этом угол θ может принимать значения в пределах от 0 до $\pi / 6$. Естественно считать, что вероятность появления точки контакта в круге равномерно распределена по всему кругу, вследствие чего величина δ будет распределена по линейному закону на отрезке $[0, r]$. Соседние частицы, имеющие до соударения вертикальные скорости v_1 и v_2 , осуществляют косой удар, характеризуемый углом

$$\theta = \arcsin \frac{\delta}{2r}. \quad (7)$$

Данную модель косо́го удара будем отождествлять с рассмотренной ранее моделью прямого удара, заменяя коэффициент восстановления для прямого удара так называемым эффективным коэффициентом восстановления

$$\lambda_{\phi} = \frac{u_{2x} - u_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}},$$

где u_{1x}, u_{2x} – вертикальные проекции соударяющихся частиц сразу после удара.

В соответствии с теорией удара для касательных и нормальных составляющих скоростей до и после удара имеем следующие соотношения:

$$u_{2\tau} - u_{1\tau} = v_{2\tau} - v_{1\tau}, \quad u_{2n} - u_{1n} = -\lambda(v_{2n} - v_{1n}).$$

Учитывая также, что

$$v_{1x} > v_{2x}, \quad u_{2x} - u_{1x} = (u_{2\tau} - u_{1\tau})\sin\theta + (u_{2n} - u_{1n})\cos\theta,$$

нетрудно получить

$$\lambda_{\phi} = \lambda \cdot \cos^2 \theta - \sin^2 \theta. \quad (8)$$

Так как угол θ может изменяться в интервале от 0 до $\pi/6$, то λ_{ϕ} может принимать значения в интервале от $0,25 \cdot (3\lambda - 1)$ до λ ; это означает, что при $\lambda < 1/3$ величина λ_{ϕ} может стать отрицательной. В таком случае соударяющиеся частицы меняются в столбце местами, что будем отражать в численном алгоритме соответствующей перенумерацией частиц.

Для построения численного решения был рассмотрен линейный ансамбль из десяти материальных частиц. В качестве параметров, определяющих ансамбль, были взяты: $\beta_k = \frac{m_{k+1}}{m_k}$ –

массив отношений масс соседних частиц в ансамбле ($k = 1, \dots, 9$); α_k – массив индивидуальных коэффициентов сопротивления ($k = 1, \dots, 10$); λ, λ_0 – массив коэффициентов восстановления при ударе соседних частиц между собой и нижней частицы со стенкой толкателя; $z = g / (A\omega^2)$ – коэффициент разгрузки. Величины α_k и β_k также считаем случайными и равномерно распределенными на интервалах $(\alpha - \Delta\alpha, \alpha + \Delta\alpha)$ и $(1 - \Delta\beta, 1 + \Delta\beta)$ соответственно. Для генерирования линейно распределенной случайной величины δ использован генератор равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$ случайной величины ξ в соответствии с зависимостью

$$\delta = r\sqrt{\xi}.$$

«Длина свободного пробега» L определялась следующим образом: сначала определялись средние расстояния между соседними частицами по достаточно большому промежутку времени, т.е.:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} x_i(t) dt \quad (i = 1, \dots, n),$$

затем определялось среднее геометрическое расстояние между частицами по количеству частиц в столбце:

$$L = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \bar{x}_i},$$

где конкретно $n = 10$; $\tau = 2\pi$; $T = 10000\pi$. Величина L характеризует как общее увеличение длины столбца выделенных

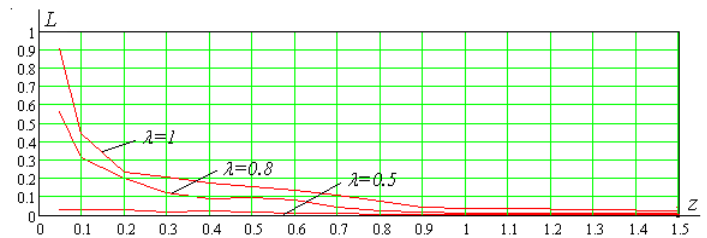


Рис. 4. График зависимости $L(z)$ при заданных значениях.

частиц, так и равномерность среднего удаления соседних частиц друг от друга вдоль столбца.

На рис. 4 приведены результаты численного расчета зависимости «длины свободного пробега» L от параметра разгрузки z при различных значениях коэффициента восстановления λ ; изменение коэффициента сопротивления, более чем десятикратное, практически не влияет на графики.

Значения параметров взяты приближенными к реальным значениям соответствующих параметров в процессах вибрационной обработки деталей:

$$\alpha = 0,044; \Delta\alpha = 0,004; \Delta\beta = 0,1.$$

Анализ данного графика показывает, что «длина свободного пробега» в целом возрастает с увеличением коэффициента восстановления λ , ростом интенсивности колебаний и при $z = 0.05$ может достигать одной амплитуды колебаний.

1. Цеснек, Л.С. Физико-статистическая интерпретация абразивного изнашивания твердых тел // Сб.: Износ и антифрикционные свойства материалов. – М.: Наука, 1968. – С. 5-47.

2. Сельвинский, В.В. Моделирование подбрасывания линейного ансамбля материальных частиц на виброплоскости // Вестник АмГУ. – Вып.41. – Благовещенск, 2008. – С. 3-4.

3. Сельвинский, В.В. Динамика контактного взаимодействия твердых тел.– Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2009. – 165 с.