В.А. Труфанов, М.Д. Штыкин

СТАЦИОНАРНОСТЬ *R*-ГАРМОНИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

In article the proof stationary in the narrow sense R - harmonious random process is considered.

Гармонические колебания представляются уравнением

$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где $A \geq 0, \omega \geq 0, \varphi$– случайные величины. Каждая реализация $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ представляет собой косинусоиду с предсказуемым поведением. Тем не менее множество всех реализаций зависит от трех параметров: A, ω, φ; поэтому для определения вероятностей различных событий в данном множестве реализаций необходимо знать трехмерную плотность вероятности $f(A, \omega, \varphi)$.

В приложениях часто встречается случайная гармоника, для которой фаза φ не зависит от амплитуды A и частоты ω, причем φ равномерно распределена на отрезке $[0;2\pi]$. В таком случае множество всех реализаций будет зависеть также от трех параметров: A,ω,φ; причем плотность вероятности будет иметь вид $f(A,\omega,\varphi) = \dfrac{1}{2\pi} f(A,\omega)\cdot$

Введем в рассмотрение случайный процесс

$$\xi_\lambda(t) = A_{\nu(t)} \cos(\omega_{\nu(t)} t + \varphi_{\nu(t)}),$$

где A, ω – неотрицательные случайные величины, $t \in R$. Случайная величина φ равномерно распределена на отрезке $[0;2\pi]$. В случайные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ рассматриваемые случайные величины $A_{\nu(t)}, \omega_{\nu(t)}, \varphi_{\nu(t)}$ переходят скачком к другому независимому значению, причем число скачков в произвольном интервале времени образуют процесс Пуассона, обозначенного символом ν_t или $\nu(t)$ и не зависимый от рассматриваемых случайных величин. Таким образом, введенный процесс называется R-гармоническим случайным процессом [1].

Процесс Пуассона является таким случайным процессом, который может принимать только целочисленные неотрицательные значения. А вероятность того, что в интервале времени $(0, t)$ произошло ν_t событий, определяется распределением Пуассона со средним значением $E\nu_t = \lambda t$

$$P(\nu_t = n) = \frac{\lambda^n t^n}{n!} \exp(-\lambda\, \mathrm{t}),\ \mathrm{n} = 0,1,2,\ldots,\ \mathrm{t} > 0.$$

Предложение. *R-гармонический случайный процесс $\xi_\lambda(t)$ является стационарным.*

Пусть F – совместное распределение A и ω, тогда для любых борелевских множеств B и C. И для любых борелевских множеств $A_1, \ldots, A_n$ и $s \in R$.

$$P(A_{\nu(t)} \cos(\omega_{\nu(t)}(t_1 + s) + \varphi_{\nu(t)}) \in A_1, \ldots, A_{\nu(t)} \cos(\omega_{\nu(t)}(t_n + s) + \varphi_{\nu(t)}) \in A_n) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P(\nu_t = m) P(A_k \cos(\omega_k(t_1 + s) + \varphi_k) \in A_1, \ldots, A_k \cos(\omega_k(t_n + s) + \varphi_k) \in A_n) =$$

$$= P(A_k \cos(\omega_k(t_1 + s) + \varphi_k) \in A_1, \ldots, A_k \cos(\omega_k(t_n + s) + \varphi_k) \in A_n) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \exp(-\lambda\, \mathrm{t}) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty P(x\cos(y(t_1+s)+\varphi_k) \in A_1, \ldots, x\cos(y(t_n+s)+\varphi_k) \in A_n)\, dF(x,y) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\varphi \in \Phi_s)\, dF(x,y),$$

где $\Phi_s = \{ z : x\cos(y(t_1+s)+z) \in A_1, \ldots, x\cos(y(t_n+s)+z) \in A_n \} \cap [0;2\pi]$.

Множество Φ_s получается из Φ_0 сдвигом на ys и приведением по модулю 2π, а распределение φ равномерно на отрезке $[0;2\pi]$, тогда последний интеграл равен

$$\int_0^\infty \int_0^\infty P(\varphi \in \Phi_0)\, dF(x,y) = P(A_k\cos(\omega_k t_1+\varphi_k) \in A_1, \ldots, A_k\cos(\omega_k t_n+\varphi_k) \in A_n) =$$

$$= P(A_{\nu(t)}\cos(\omega_{\nu(t)} t_1+\varphi_{\nu(t)}) \in A_1, \ldots, A_{\nu(t)}\cos(\omega_{\nu(t)} t_n+\varphi_{\nu(t)}) \in A_n).$$

---

1. Турбин А.Ф., Труфанов В.А. Свойства *R*-гармонических случайных процессов // Дальневосточный математический сборник. – Владивосток: Изд-во Дальнаука ДВО РАН, 1997. — Вып. 4. — С. 34-38.

2. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. — М.: Наука, 1986.