Рис. 7. Функции когерентности виброускорений вертикально-сверлильного станка мод. 2Н135.

3. Вибрации в технике. Измерения и испытания. – Т.5/ под ред. М.Д. Генкина. – М.: Машиностроение, 1981.

4. Влияние рабочего процесса на шумообразование полуавтомата для изготовления сетки из стального листа / А.Н. Чукарин, Г.В. Самодуров, А.А. Феденко // Новое в экологии и безопасности жизнедеятельности: Труды междунар. эколог. Конгресса, 14-16 июня. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2000. – Т. 2.– С.226-229.

5. Клюкин И.И., Колесников А.Е. Акустические измерения в судостроении. – Л.: Судостроение, 1966.

6. Клюкин И.И., Колесников А.Е. Акустические измерения в судостроении. – 3-.е изд., перераб. и доп. – Л.: Судостроение, 1982.

7. Медведев А.М., Литовка Г.В. Исследование с помощью универсальной установки вибропоглощающих характеристик металлорежущих станков // Обработка металлов. – Новосибирск, 2007. – № 4 (37).

8. Месхи Б.Ч. Виброакустические характеристики широкоуниверсальных фрезерных станков // Изв. вузов. Машиностроение. – 2004. – № 3. – С.45-51.

9. Месхи Б.Ч. Оценка шумовой обстановки на рабочих местах ОАО «Рубин» // Безопасность жизнедеятельности. – 2004. – № 3. – С.19-20.

10. Месхи Б.Ч. Шумообразование при работе дисковых и отрезных фрез // Изв. вузов. Сев.-Кавказского региона. Техн. науки. – 2003. – № 5. Приложение. – С.71-74.

11. Месхи Б.Ч. Улучшение условий труда операторов металлорежущих и деревообрабатывающих станков за счет снижения шума в рабочей зоне (теория и практика). – Ростов н/Д.: ДГТУ, 2003.

12. Месхи Б.Ч. О расчете уровней шума в рабочей зоне операторов металло- и деревообрабатывающего оборудования // Вестник ДГТУ. – 2004. – Т. 4, № 1 (19). – С. 92-98.

13. Павлов Б.В. Акустическая диагностика механизмов. – М., 1971.

14. Пищиков В.Д., Розанов А.Ф. Текстильное машиностроение в России: состояние, проблемы, перспективы // – М.: Текстильная промышленность. – 2001. –№ 6. – С.14-16.

15. Постников О.К. Виброакустическая диагностика полиграфического оборудования. – М., 1984.

16. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара: Справочник/ под ред. В.В.Клюева. – М., 1978.

17. Харрис С.М., Крид Ч.И. Справочник по ударным нагрузкам. – Л., 1978.

Н.Н. Кушнирук

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ МОДИФИЦИРОВАННОГО ФУНКЦИОНАЛА ЛАГРАНЖА В ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ТРЕНИЕМ

The article is devoted semicoercive model problem with friction. Nondifferentiable functional unconditional minimization, arising in a model friction problem is reduced to differentiable functional conditional minimization. A dual scheme, based on modified Lagrangian functional, is used for solution obtained.

В статье исследуется модельная задача с трением. Задача безусловной минимизации недифференцируемого функционала сводится к задаче условной минимизации дифференцируемого функционала. Для решения ее в новой постановке применяется схема двойственности, основанная на модифицированном функционале Лагранжа.

Пусть Ω – ограниченная область в R^2 с достаточно гладкой границей Г. Рассмотрим задачу [1]

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} g|\gamma\, v|\, d\Gamma \to \min, \\ v \in W_2^1(\Omega), \end{cases} \qquad (1)$$

где $f \in L_2(\Omega)$ – перепад давления; $g = const > 0$ – сила трения на границе Г области Ω; $\gamma\, v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ – след функции $v \in W_2^1(\Omega)$ на Г.

Для решения задачи в новой постановке ранее (см. [2]) был применен метод итеративной проксимальной регуляризации.

Данная задача является идеализированным вариантом одной из задач, встречающихся в теории упругости. Решение описывает движение жидкости в бесконечной трубе с поперечным сечением Ω с заданным трением на границе Г.

Известно, что задача (1) допускает постановку в виде вариационного неравенства

$$\begin{cases} v \in W_2^1(\Omega), \\ \int\limits_{\Omega}\nabla v \nabla(u - v)d\Omega - \int\limits_{\Omega} f(u - v)d\Omega + \int\limits_{\Gamma} g(|\gamma u| - |\gamma v|)d\Gamma \ge 0 \\ \forall u \in W_2^1(\Omega). \end{cases}$$

Если предположить, что решение $v \in W_2^2(\Omega)$, то решение задачи (1) эквивалентно решению краевой задачи:

$$\begin{cases} -\Delta v = f \quad в \quad \Omega, \\ \left|\dfrac{\partial v}{\partial n}\right| \le g, \ \ v\dfrac{\partial v}{\partial n} + |v| g = 0 \ \ на \ \ \Gamma. \end{cases}$$

Минимизируемый функционал не является сильно выпуклым в $W_2^1(\Omega)$, и задача (1) может не иметь решения. Однако если выполнено условие

$$g\, mes\, \Gamma - \left|\int_\Omega f\, d\Omega\right| > 0, \qquad (2)$$

то решение задачи (1) существует, и функционал в задаче (1) является коэрцитивным, т.е. [3]:

$$J(v) \to +\infty \text{ при } \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty .$$

Приближенное решение задачи (1) существенно осложняется недифференцируемостью минимизируемого функционала.

Далее везде будем полагать, что $f \le 0$ в Ω. Ранее ([2], [4]) было показано, что если это условие выполнено, то решение v задачи (1) будет неположительным в Ω, в частности на границе Γ. Тогда задачу безусловной минимизации (1) в этом предположении можно свести к эквивалентной задаче условной минимизации дифференцируемого функционала

$$\begin{cases} \tilde J(v) = \dfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega - \int_\Omega f\, v\, d\Omega - \int_\Gamma g\,\gamma\, v\, d\Gamma \to \min, \\ v \in G = \{w \in W_2^1(\Omega) : \gamma\, w \le 0 \ \ на\ \ \Gamma\}. \end{cases} \qquad (3)$$

При выполнении условия (2) решение задачи (3) существует и будет единственным.

Задача (3) равносильна вариационному неравенству:

$$\begin{cases} v \in G, \\ \int_\Omega \nabla v \nabla (u - v) d\Omega - \int_\Omega f(u - v) d\Omega - \int_\Gamma g\,\gamma\,(u - v) d\Gamma \ge 0 \ \ \forall u \in G. \end{cases}$$

В предположении, что решение $v \in W_2^2(\Omega)$, задача (3) эквивалентна краевой задаче:

$$\begin{cases} -\Delta v = f \ \ в\ \ \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} \le g,\ \ \gamma v \le 0,\ \ \gamma v\left(\dfrac{\partial v}{\partial n} - g\right) = 0 \ \ на\ \ \Gamma. \end{cases} \qquad (4)$$

Рассмотрим классическую схему двойственности для решения задачи условной оптимизации (3). Запишем классический функционал Лагранжа:

$$L(v, l) = \tilde J(v) + \int_\Gamma \gamma\, l\, v d\Gamma = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega - \int_\Omega f\, v d\Omega -$$
$$- \int_\Gamma g\,\gamma\, v d\Gamma + \int_\Gamma l\,\gamma\, v d\Gamma,$$
$$\forall (v, l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma).$$

Обозначим $(L_2(\Gamma))^+$ – конус неотрицательных на Γ функций, интегрируемых со своим квадратом.

Определение 1. Пара $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+$ называется седловой точкой для $L(v, l)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$L(v^*, l) \le L(v^*, l^*) \le L(v, l^*), \qquad \forall v \in W_2^1(\Omega),\ \forall l \in (L_2(\Gamma))^+.$$

Имеем

$$\tilde J(v^*) + \int_\Gamma l\,\gamma\, v^* d\Gamma \le \tilde J(v^*) + \int_\Gamma l^*\,\gamma\, v^* d\Gamma \le \tilde J(v) +$$
$$+ \int_\Gamma l^*\,\gamma\, v d\Gamma, \qquad (5)$$
$$\forall v \in W_2^1(\Omega),\ \forall l \in (L_2(\Gamma))^+.$$

Из левой части двойного неравенства на (5) вытекает, что $v^* \le 0$ на Γ. Действительно, допустим противное, что $\exists \Gamma_1 \subset \Gamma$ (mes $\Gamma_1 > 0$): $v^* > 0$ на Γ_1. Из левого неравенства в (5) получим:

$$\int_\Gamma l\,\gamma\, v^* d\Gamma \le \int_\Gamma l^*\,\gamma\, v^* d\Gamma.$$

В качестве l возьмем функцию, принимающую значение l^* на Γ / Γ_1 и неограниченно возрастающую на Γ_1. Подставив в интеграл в левой части последнего неравенства, получим противоречие.

Покажем, что $l^* v^* = 0$ на Γ. Предположим противное, что $\exists \Gamma_1 \subset \Gamma$ (mes $\Gamma_1 > 0$): $l^* v^* < 0$ на Γ_1. Таким образом, $l^* > 0$, $v^* < 0$ на Γ_1. Взяв в качестве l функцию вида

$$l = \begin{cases} l^* & на\ \ \Gamma / \Gamma_1, \\ 0 & на\ \ \Gamma_1, \end{cases}$$

получим противоречие левому неравенству. Тем самым $l^* v^* = 0$ на Γ. Тогда

$$\tilde J(v^*) = \tilde J(v^*) + \int_\Gamma l^*\,\gamma\, v^* d\Gamma = \min_{v \in W_2^1(\Omega)} \left\{\tilde J(v) + \int_\Gamma l^*\,\gamma\, v d\Gamma\right\} \le$$
$$\le \min_{v \in G} \left\{\tilde J(v) + \int_\Gamma l^*\,\gamma\, v\, d\Gamma\right\} \le \min_{v \in G} \tilde J(v),$$

т.е. $v^* \in G$ является решением задачи (3).

Так как $v^* = \arg \min\limits_{v \in W_2^1(\Omega)} L(v, l^*)$, то имеет место равенство

$$\int_\Omega \nabla v^* \nabla w\, d\Omega - \int_\Omega f\, w\, d\Omega - \int_\Gamma g\ \gamma\, w\, d\Gamma + \int_\Gamma l^*\ \gamma\, w\, d\Gamma = 0,$$
$$\forall w \in W_2^1(\Omega).$$

Предположим, что $v^* \in W_2^2(\Omega)$, и проинтегрируем первое слагаемое по частям. Имеем:

$$- \int_\Omega \Delta v^* w\, d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial v^*}{\partial n}\ \gamma\, w\, d\Gamma - \int_\Omega f\, w\, d\Omega - \int_\Gamma g\ \gamma\, w\, d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma l^*\ \gamma\, w\, d\Gamma = 0$$

$$- \int_\Omega \Delta v^* w\, d\Omega - \int_\Omega f\, w\, d\Omega + \int_\Gamma \left(\frac{\partial v^*}{\partial n} + l^* - g\right) \gamma\, w\, d\Gamma = 0.$$

Пусть $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – произвольное. Тогда

$$\begin{cases} -\Delta v^* = f \ \ в\ \ \Omega, \\ l^* = g - \dfrac{\partial v^*}{\partial n} \ \ на\ \ \Gamma. \end{cases}$$

Тем самым $\dfrac{\partial v^*}{\partial n} - g \le 0$ на Γ и $v^*\left(\dfrac{\partial v^*}{\partial n} - g\right) = 0$ на Γ. Это означает, что $v^* \in W_2^2(\Omega)$ является решением (единственным) краевой задачи (4). Из всего вышесказанного вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть (v^*, l^*) – седловая точка функции Лагранжа и $v^* \in W_2^2(\Omega)$. Тогда $v^* = v$, $l^* = g - \dfrac{\partial v}{\partial n}$, где v – решение (единственное) экстремальной задачи (3).

Применение методов двойственности для поиска седловой точки с использованием функционала $L(v, l)$ невозможно, так как сходимость итерационного процесса обеспечивается согласованием длины шага сдвига по двойственной переменной l с константой положительной определенности квадратичной формы минимизируемого функционала. В (3) квадратичная форма $a(v, v) = \dfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega$ лишь неотрицательно определена в $W_2^1(\Omega)$. Поэтому в работе используются модифицированные функции Лагранжа.

Определим в модифицированный функционал [5]

$$M(v, l) = \tilde J(v) + \frac{1}{2r}\int_\Gamma \left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\} d\Gamma,$$

где $r > 0$ – const; $(l + r\gamma v)^+ = \max\{0,\ l + r\gamma v\}$.

Определение 2. Пара $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)$ называется седловой точкой для $M(v, l)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*,l) \le M(v^*,l^*) \le M(v,l^*), \qquad \forall v \in W_2^1(\Omega),\ \forall l \in L_2(\Gamma).$$

Из определения следует, что

$$\inf_{v\in W_2^1(\Omega)} M(v,l^*) = M(v^*,l^*) = \sup_{l\in L_2(\Gamma)} M(v^*,l).$$

Легко показать, что функционал $M(v, l)$ является выпуклым по v при фиксированном l и вогнутым по l – при фиксированном v. Более того, он является дифференцируемым по Гато по двум переменным, и имеют место формулы

$$(\nabla_v M(v,l),h) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla v\nabla h\,d\Omega - \int_\Omega f\,h\,d\Omega - \int_\Gamma g\,h\,d\Gamma +$$

$$+\int_\Gamma (l + r\gamma v)^+ h\,d\Gamma, \quad \forall h\in W_2^1(\Omega);$$

$$(\nabla_l M(v,l),\theta) = \frac{1}{r}\int_\Gamma \{(l + r\gamma v)^+ - l\}\theta\,d\Gamma \quad \forall\theta\in L_2(\Gamma).$$

Для исследования рассмотрим абстрактную схему, подобную рассмотренной в [5, 6] для конечномерных задач оптимизации. Позже данная схема была применена для исследования полукоэрцитивной задачи Синьорини [7].

На пространстве $W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)\times L_2(\Gamma)$ определим функционал

$$K(v,l,m) = \begin{cases} \tilde{J}(v) + \int_\Gamma lm\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\,d\Gamma, & \gamma v \le m, \\ +\infty & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Вычислим

$$\inf_m K(v,l,m) = \inf_{\gamma v\le m}\left\{\tilde{J}(v) + \int_\Gamma\left(lm + \frac{r}{2}m^2\right)d\Gamma\right\} =$$

$$= \inf_{\gamma v\le m}\left\{\tilde{J}(v) + \frac{1}{2r}\int_\Gamma\left[(l+rm)^2 - l^2\right]d\Gamma\right\} =$$

$$= \tilde{J}(v) + \frac{1}{2r}\int_\Gamma\left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\}d\Gamma = M(v,l).$$

Введем функционал

$$\underline{M}(l) = \inf_v M(v,l) = \inf_v\left\{\tilde{J}(v) + \frac{1}{2r}\int_\Gamma\left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\}d\Gamma\right\}. \qquad (6)$$

В силу того, что $\inf_v\inf_m K(v,l,m) = \inf_m\inf_v K(v,l,m)$, запишем:

$$\inf_m\inf_v K(v,l,m) = \inf_m\inf_v\left\{\tilde{J}(v) + \int_\Gamma lm\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\,d\Gamma\right\} =$$

$$= \inf_m\left\{\inf_{\gamma v\le m}\tilde{J}(v) + \int_\Gamma lm\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\,d\Gamma\right\} =$$

$$= \inf_m\left\{\chi(m) + \int_\Gamma lm\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\,d\Gamma\right\},$$

где $\chi(m) = \inf_{\gamma v\le m}\tilde{J}(v)$ – функция чувствительности. Поэтому $\underline{M}(l)$ допускает представление

$$\underline{M}(l) = \inf_m\left\{\chi(m) + \int_\Gamma lm\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\,d\Gamma\right\}. \qquad (7)$$

Задача

$$\begin{cases}\tilde{J}(v)\to\min, \\ v\in G_m = \{w\in W_2^1(\Omega):\ \gamma w\le m \text{ на } \Gamma\}\end{cases}$$

имеет решение при любом $m \in L_2(\Gamma)$. Легко показать, что $\chi(m)$ является выпуклой функцией. Из условия (2) следует, что $\chi(m) \ne -\infty$. Следовательно, $\chi(m)$ – выпуклый конечнозначный функционал.

Тогда функционал $\chi(m) + \int_\Gamma lm\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\,d\Gamma$ будет сильно выпуклым на $L_2(\Gamma)$, и, следовательно, нижняя грань в задаче (7) будет достигаться на единственном элементе $m(l)$ при произвольном фиксированном $l \in L_2(\Gamma)$.

Теорема 2. Задача (6) разрешима при любом фиксированном $l \in L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Покажем коэрцитивность функционала $M(v, l)$ по v при фиксированном $l \in (L_2(\Gamma))^+$. Для любого $v\in W_2^1(\Omega)$ границу Γ разобьем на две части Γ_1 и Γ_2 таким образом, чтобы $\gamma v > 0$ на Γ_1 и $\gamma v \le 0$ на Γ_2. Тогда:

$$\int_\Gamma\left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\}d\Gamma = \int_{\Gamma_1}\left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\}d\Gamma +$$

$$+\int_{\Gamma_2}\left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\}d\Gamma = \int_{\Gamma_1}\left\{(l + r\gamma v)^2 - l^2\right\}d\Gamma +$$

$$+\int_{\Gamma_2}\left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\}d\Gamma \ge \int_{\Gamma_1}\left(2lr\gamma v + r^2(\gamma v)^2\right)d\Gamma -$$

$$-\int_{\Gamma_2} l^2\,d\Gamma \ge \int_\Gamma\left(2lr(\gamma v)^+ + r^2\left[(\gamma v)^+\right]^2\right)d\Gamma - \int_\Gamma l^2\,d\Gamma \ge$$

$$\ge \int_\Gamma\left(2lr\gamma v^+ + r^2(\gamma v^+)^2\right)d\Gamma - \int_\Gamma l^2\,d\Gamma \ge r^2\int_\Gamma(\gamma v^+)^2\,d\Gamma - \int_\Gamma l^2\,d\Gamma.$$

Далее имеем:

$$M(v,l) = \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\,d\Omega - \int_\Omega fv\,d\Omega - \int_\Gamma g\,\gamma v\,d\Gamma +$$

$$+\frac{1}{2r}\int_\Gamma\left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\}d\Gamma =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v^+|^2\,d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v^-|^2\,d\Omega - \int_\Omega f\,v^+\,d\Omega - \int_\Omega f\,v^-\,d\Omega -$$

$$-\int_\Gamma g\,\gamma v^+\,d\Gamma - \int_\Gamma g\,\gamma v^-\,d\Gamma + \frac{1}{2r}\int_\Gamma\left\{\left[(l + r\gamma v)^+\right]^2 - l^2\right\}d\Gamma \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v^+|^2\,d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v^-|^2\,d\Omega - \int_\Omega f\,v^+\,d\Omega - \int_\Omega f\,v^-\,d\Omega -$$

$$-\int_\Gamma g\,\gamma v^+\,d\Gamma - \int_\Gamma g\,\gamma v^-\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma(\gamma v^+)^2\,d\Gamma - \frac{1}{2r}\int_\Gamma l^2\,d\Gamma.$$

Пусть $\|v^+\|_{W_2^1(\Omega)}\to\infty$, тогда, исходя из того, что величина $\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\,d\Omega + \frac{r}{2}\int_\Gamma(\gamma\ v)^2\,d\Gamma$ эквивалентна $\|v\|^2_{W_2^1(\Omega)}$, получаем:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v^+|^2\,d\Omega - \int_\Omega f\ v^+\,d\Omega - \int_\Gamma g\ \gamma\ v^+\,d\Gamma +$$

$$+\frac{r}{2}\int_\Gamma(\gamma\ v^+)^2\,d\Gamma \to +\infty$$

Пусть $\|v^-\|_{W_2^1(\Omega)}\to\infty$, тогда, учитывая условие (2), получим:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v^-|^2\,d\Omega - \int_\Omega f\ v^-\,d\Omega - \int_\Gamma g\ \gamma\ v^-\,d\Gamma \to +\infty$$

Таким образом $M(v, l) \to +\infty$ при произвольном фиксированном $l \in (L_2(\Gamma))^+$. А это означает, что задача (6) разрешима. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(l) \to \max, \\ l \in L_2(\Gamma) \end{cases} \tag{8}$$

Будем называть ее двойственной к задаче (3).

Введем функционал

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v,l), \qquad v \in W_2^1(\Omega).$$

Предположим, что $\gamma\, v \le 0$. Тогда $K(v,l,0) = \tilde{J}(v)$ $\forall l \in L_2(\Gamma)$, поэтому

$$M(v,l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma)} K(v,l,m) \le K(v,l,0) = \tilde{J}(v) \quad \forall v \in G.$$

Таким образом:

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v,l) \le \tilde{J}(v) \quad \forall v \in G. \tag{9}$$

С другой стороны, для всех $v \in W_2^1(\Omega)$

$$M(v,0) = \inf_{m \in L_2(\Gamma)} K(v,0,m) = \inf_{\gamma v \le m} K(v,0,m) =$$

$$= \inf_{\gamma v \le m} \left\{ \tilde{J}(v) + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 d\Gamma \right\} = \tilde{J}(v) + \frac{r}{2} \inf_{\gamma v \le m} \int_\Gamma m^2 d\Gamma \ge \tilde{J}(v).$$

Таким образом:

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v,l) \ge M(v,0) \ge \tilde{J}(v) \qquad \forall v \in W_2^1(\Omega). \tag{10}$$

Из (9), (10) вытекает

$$\overline{M}(v) = \tilde{J}(v) \qquad \forall v \in G. \tag{11}$$

Рассмотрим функцию

$$\overline{K}(v,l,m) = \begin{cases} \tilde{J}(v) + \int_\Gamma lm d\Gamma, & \gamma v \le m, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для $l \in (L_2(\Gamma))^+$

$$\inf_{m \in L_2(\Gamma)} \overline{K}(v,l,m) = \tilde{J}(v) + \int_\Gamma l \;\; \gamma \;\; v d\Gamma = L(v,l).$$

Очевидно, $K(v,l,m) \ge \overline{K}(v,l,m)$, поэтому для $l \in (L_2(\Gamma))^+$ $M(v,l) \ge L(v,l)$. Следовательно, $\overline{M}(v) \ge \overline{L}(v)$, где $\overline{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} L(v,l)$. Если $v \notin G$, то

$$\overline{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} L(v,l) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} \left\{ \tilde{J}(v) + \int_\Gamma l \;\; \gamma \;\; v d\Gamma \right\} = +\infty \tag{12}$$

и, тем самым, $\overline{M}(v) = +\infty \quad \forall v \notin G$.

Тогда из (11), (12) получаем

$$\overline{M}(v) = \begin{cases} \tilde{J}(v), & v \in G, \\ +\infty, & v \notin G. \end{cases}$$

Поэтому исходную задачу можно представить в виде

$$\begin{cases} \overline{M}(v) \to \min, \\ v \in W_2^1(\Omega) \end{cases} \tag{13}$$

Очевидно, что

$$\inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v,l) \ge \sup_{l \in L_2(\Gamma)} \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} M(v,l),$$

$$\inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \overline{M}(v) \ge \sup_{l \in L_2(\Gamma)} \underline{M}(l). \tag{14}$$

Последнее неравенство означает, что если для некоторой пары $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ выполнено равенство $\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*)$, то v^* и l^* являются решениями задач (13) и (8) соответственно.

Теорема 3. Чтобы $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ была седловой точкой функционала $M(v,l)$, необходимо и достаточно, чтобы было решением задачи (13) и для любых выполнилось неравенство

$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 d\Gamma \ge \chi(0).$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ – седловая точка модифицированного функционала $M(v,l)$. Это означает, что:

$$\sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v^*, l) = M(v^*, l^*) = \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} M(v, l^*),$$

$$\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*).$$

Тогда отсюда и из (14) следует, что v^* есть решение задачи (13), а l^* – решение задачи (8). Следовательно:

$$\underline{M}(l^*) = \overline{M}(v^*) = \min_{v \in G} \tilde{J}(v) = \chi(0).$$

Это означает

$$\inf_{m \in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma l^* m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 d\Gamma \right\} = \chi(0),$$

т.е. $\chi(m) + \int_\Gamma l^* m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 d\Gamma \ge \chi(0) \qquad \forall m \in L_2(\Gamma).$

Достаточность. Пусть v^* есть решение задачи (13) и выполнено неравенство

$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 d\Gamma \ge \chi(0) \qquad \forall m \in L_2(\Gamma).$$

Имеем:

$$\underline{M}(l^*) = \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma l^* m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 d\Gamma \right\} \ge \chi(0) = \overline{M}(v^*).$$

Тогда из (14) и последнего соотношения следует, что $\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*)$. Значит, согласно определению 2 седловой точки модифицированной функции Лагранжа, v^* является решением задачи (13), а l^* – решением задачи (8). Теорема доказана.

Теорема 4. Множества седловых точек классического функционала Лагранжа $L(v,l)$ и модифицированного функционала Лагранжа $M(v,l)$ совпадают.

Доказательство. Пусть $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+$ – седловая точка функционала $L(v,l)$. Имеем:

$$L(v^*, l) \le L(v^*, l^*) \le L(v, l^*) \quad \forall \; v \in W_2^1(\Omega), \;\; \forall l \in (L_2(\Gamma))^+$$

Это означает, что:

$$\sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} L(v^*, l) = L(v^*, l^*) = \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} L(v, l^*),$$

$$\overline{L}(v^*) = L(v^*, l^*) = \underline{L}(l^*).$$

Тогда

$$\overline{L}(v^*) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} L(v^*, l) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} \left\{ \tilde{J}(v^*) + \int_\Gamma l \;\; \gamma \;\; v^* d\Gamma \right\} =$$

$$= \tilde{J}(v^*) = \chi(0).$$

$$\underline{L}(l^*) = \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} L(v, l^*) = \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \overline{K}(v, l^*, m) =$$

$$= \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \overline{K}(v, l^*, m) = \inf_{\gamma v \le m} \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \left\{ \tilde{J}(v) + \int_\Gamma l^* \;\; m d\Gamma \right\} =$$

$$\inf_{m \in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma l^* \;\; m d\Gamma \right\}.$$

Поэтому

$$\chi(0)=\inf_{m\in L_2(\Gamma)}\left\{\chi(m)+\int_\Gamma l^* \quad m d\Gamma\right\},$$

или

$$\chi(m)+\int_\Gamma l^* \quad m d\Gamma\ge\chi(0)\qquad\forall m\in L_2(\Gamma).$$

Так как v^* является решением задачи (13) и

$$\chi(m)+\int_\Gamma l^* \quad m d\Gamma+\frac{r}{2}\int_\Gamma m^2 d\Gamma\ge\chi(m)+\int_\Gamma l^* \quad m d\Gamma\ge\chi(0),$$

из теоремы 3 следует, что (v^*,l^*) является седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа.

Пусть теперь (v^*,l^*) – седловая точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(v,l)$. Покажем, что $-l^*\in\partial\chi(0)$, где $\partial\chi(0)$ – субдифференциал функции $\chi(m)$ в точке $m=0$. По определению субдифференциала это означает, что:

$$\chi(m)-\chi(0)\ge-\int_\Gamma l^* m d\Gamma\qquad\forall m\in L_2(\Gamma),$$

$$\chi(m)+\int_\Gamma l^* m d\Gamma\ge\chi(0)\qquad\forall m\in L_2(\Gamma).$$

Пусть, напротив, $-l^*\notin\partial\chi(0)$. Тогда найдется элемент $\bar m\in L_2(\Gamma)$ такой, что

$$\chi(\bar m)+\int_\Gamma l^*\bar m d\Gamma<\chi(0). \tag{15}$$

Обозначим $\zeta=\chi(0)-\chi(\bar m)-\int_\Gamma l^*\bar m d\Gamma>0$ и $m(\lambda)=\lambda$ $\bar m+(1-\lambda)\cdot 0$. По теореме 3 имеем

$$\chi(m)+\int_\Gamma l^* m d\Gamma+\frac{r}{2}\int_\Gamma m^2 d\Gamma\ge\chi(0)\qquad m\in L_2(\Gamma).$$

Поэтому при $m(\lambda)=\lambda\ \ \bar m$ имеем

$$\chi(0)\le\chi(m(\lambda))+\lambda\int_\Gamma l^*\bar m d\Gamma+\frac{r\lambda^2}{2}\int_\Gamma\bar m^2 d\Gamma\le$$

$$\le\lambda\chi(\bar m)+(1-\lambda)\chi(0)+\lambda\int_\Gamma l^*\bar m d\Gamma+\frac{r\lambda^2}{2}\int_\Gamma\bar m^2 d\Gamma=$$

$$=\lambda\left(\chi(\bar m)-\chi(0)+\int_\Gamma l^*\bar m d\Gamma\right)+\chi(0)+\frac{r\lambda^2}{2}\int_\Gamma\bar m^2 d\Gamma,$$

$$\lambda\left(\chi(0)-\chi(\bar m)-\int_\Gamma l^*\bar m d\Gamma\right)\le\frac{r\lambda^2}{2}\int_\Gamma\bar m^2 d\Gamma,$$

$$\chi(0)-\chi(\bar m)-\int_\Gamma l^*\bar m d\Gamma\le\frac{r\lambda}{2}\int_\Gamma\bar m^2 d\Gamma.$$

Тогда из (15) следует, что:

$$0<\zeta\le\frac{r\lambda}{2}\int_\Gamma\bar m^2 d\Gamma.$$

Устремляя λ к нулю, получим $0<\zeta\le 0$. Полученное противоречие показывает, что $-l^*\in\partial\chi(0)$, т.е.:

$$\chi(m)+\int_\Gamma l^* m d\Gamma\ge\chi(0)\qquad\forall m\in L_2(\Gamma), \tag{16}$$

откуда

$$\int_\Gamma l^* m d\Gamma\ge\chi(0)-\chi(m)\ge 0\qquad \text{при}\qquad m\ge 0.$$

Тем самым показано, что $l^*\in\left(L_2(\Gamma)\right)^+$. Отсюда следует

$$\underline{L}(l^*)=\inf_{v\in W_2^1(\Omega)}L(v,l^*)=\inf_{m\in L_2(\Gamma)}\left\{\chi(m)+\int_\Gamma l^* \quad m d\Gamma\right\}.$$

Тогда из (16) имеем $\underline{L}(l^*)\ge\chi(0)$.

Так как по теореме 1 элемент v^* есть решение задачи (13), то

$$\overline{L}(v^*)=\sup_{l\in(L_2(\Gamma))^+}L(v^*,l)=\sup_{l\in(L_2(\Gamma))^+}\left\{\tilde J(v^*)+\int_\Gamma l \quad \gamma \quad v^* d\Gamma\right\}=$$

$$=\tilde J(v^*)=\chi(0).$$

Поэтому

$$\chi(0)=\overline{L}(v^*)\ge\underline{L}(l^*)\ge\chi(0),$$

т.е. $\overline{L}(v^*)=\underline{L}(l^*)$.

Следовательно, пара является седловой точкой функционала (v^*,l^*). *Теорема доказана.*

1. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979.
2. Вихтенко Э.М., Кушнирук Н.Н., Намм Р.В. Об одном подходе к решению полукоэрцитивной задачи с трением // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 1 «Математическое программирование». – Иркутск; Северобайкальск, 2008. – С. 280-286.
3. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. – М.: Мир, 1986.
4. Кушнирук Н.Н., Намм Р.В. О решении полукоэрцитивной модельной задачи с трением // Вестник АмГУ. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2008. – Вып. 41. – С. 5-8.
5. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989.
6. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. – Новосибирск: Наука, 1981.
7. Ву Г., Намм Р.В., Сачков С.А. Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 46. – С. 26-36.