

А.М. Медведев, Г.В. Литовка,  
А.В. Станийчук, Е.С. Кишлалы

### ОЦЕНКА ИСТОЧНИКОВ ЗВУКОИЗЛУЧЕНИЯ В МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКАХ

*The article estimation of sources of sound generation  
in metal-cutting machine tools.*

По размерам парка технологического оборудования Россия занимает одно из первых мест в мире, большая часть которого формировалась и может формироваться в будущем за счет отечественного машиностроения [14]. Задачу поддержания действующего парка оборудования в работоспособном состоянии можно решить за счет модернизации и ремонта действующих машин. Сложное финансовое положение большинства предприятий текстильной и легкой промышленности объективно обуславливает на ближайшие годы доминирующую роль именно этого пути.

Одним из важнейших показателей динамического качества оборудования, определяющего условия труда обслуживающего персонала и его конкурентоспособность на рынке, является шум. Авторы в своей работе представляют исследования виброакустических характеристик, методологию идентификации источников вибрации и шума металлорежущего оборудования для текстильного машиностроения. Анализ результатов исследований шумового режима на предприятиях текстильного машиностроения [4, 8-12] позволяет заключить, что шум на рабочих местах в основных производствах в ряде случаев превышает гигиенические нормы, является постоянным, широкополосным, с равномерным распределением уровней по всем полосам частот (колебания уровней не превосходят 10-15 дБ для всего спектра).

Машиностроительные производства могут быть разделены на три класса: высокошумные (превышение гигиенических норм более 10 дБ), среднешумные (превышение норм – 5-10 дБ) и малошумные (без превышения норм или с их превышением в пределах 5 дБ). Превышение гигиенических норм в спектрах шума наблюдается в основном на частотах выше 500 Гц, т.е. главным образом в высокочастотной области спектра.

Сравнение шумовых характеристик отечественных машин с зарубежными (по литературным данным и полученным прямым измерением) позволяет заключить, что шумовые характеристики серийного оборудования в настоящее время в целом равнозначны [9, 11]. Большинство машин высокошумные.

#### Локализация источников акустической энергии

**Методология исследований.** Современные технологические машины, предназначенные для обработки металлов резанием, представляют собой жесткую металлическую конструкцию, на которой смонтированы рабочие органы и их приводы. Отдельные механизмы (а иногда и вся машина) располагают ограждениями, выполняющими защитные функции. На некоторых машинах имеются встроенные пневмо- и гидросистемы технологического назначения.

Во время работы машины возникают механические и аэродинамические шумы. Так, низкочастотные механические шумы порождаются вибрациями деталей станин, ограждений, рабочих органов и приводов, вызванными инерционными силами подвижных элементов и рабочими нагрузками. Высокочастотные механические шумы и порождающие их вибрации вызываются ударами в подвижных соединениях деталей приводов рабочих органов при наличии зазоров, динамическими нагрузками циклического характера в зубчатых зацеплениях и подшипниковых узлах, а также силами трения.

Низкочастотные аэродинамические шумы возникают при работе быстровращающихся рабочих органов и вентиляторов встроенных пневмосистем, а высокочастотные – при обработке резанием.

В основе методики определения источников акустической энергии в металлорежущем станке лежит представление о сложной взаимосвязи потоков акустической энергии, вызывающих шум.

Шум на рабочем месте определяется общей мощностью звукоизлучения  $P$ , равной сумме потоков звуковой энергии различной природы.

Классификация методов локализации источников виброакустической активности металлорежущих станков приведена на рис. 1.

Как видно из рис. 1, применение этих методов предполагает их взаимодополняющее сочетание на двух этапах исследования.

I этап – получение обобщенной информации об источниках с использованием универсальной акустической аппаратуры. Исследование проводится в производственных условиях и не требует высокой квалификации оператора.

II этап – уточнение полученной на предыдущем этапе информации о вкладе в общее изучение акустической энергии, частотного состава энергии источника, фазы механизмов циклического действия в момент максимального акустического излучения энергии; параметров ударных импульсов. Для исследования на этом этапе необходимы специальная акустическая аппаратура и высокая квалификация оператора (анализ выполняется в лабораторных условиях).

Все используемые методы могут быть разделены на пять групп:

1. Методы физического разделения источников – отключения, исключения (капсуляции), предполагающие исследование потоков акустической энергии при последовательном отключении отдельных источников (генераторов и излучателей), начиная с наиболее мощных.

2. Методы частотного и частотно-временного разделения источников: расчетных частот, узкополосных спектров, фазоположения. Эти методы основаны на выявлении в спектре шума машин циклических частот механизмов, соответствующих динамическим и аэродинамическим процессам при их работе, а также резонансных частот отдельных деталей, обуславливающих интенсивное излучение шума на данных частотах.

После локализации механизма-источника рассмотрение временного изменения излучения в полосе частот во взаимосвязи с циклограммой его работы (методы фазоположения, осциллограмм и спектров в реальном времени) позволяет установить природу циклического акустического сигнала с учетом и взаимодействия механизмов и их деталей.

3. Методы пространственного разделения источников (ближнего поля, распределения амплитуд вибрации) основаны на зависимости интенсивности акустических полей от расстояния до источника и концентрации акустической энергии в зоне его расположения.

4. Методы ориентировочной расчетной оценки интенсивности излучения отдельных механизмов и деталей машин (оценки вибрационных полей, расчетных частот). Эти методы предполагают ориентировочный расчет звуковой мощности отдельных деталей машин и оценку интенсивности излучения на расчетных частотах динамических процессов в механизмах.

5. Методы, основанные на применении вычислительной техники, корреляционных и взаимных спектров. Они предполагают определение специальных функций (корреляции, когерентности), позволяющих оценить вклад рассматриваемого источника в общее акустическое излучение.

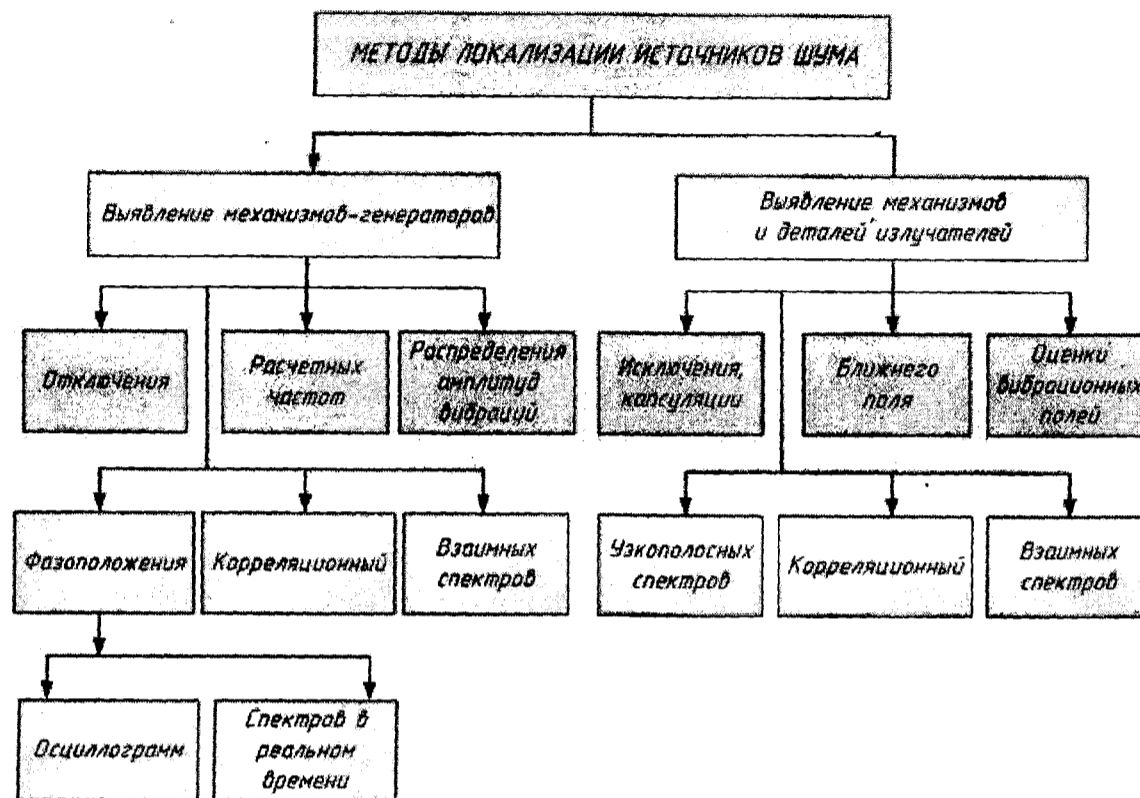


Рис. 1. Классификация методов локализации источников шумов металлорежущих станках.

После локализации источников акустической энергии выполняется исследование отдельных акустически активных узлов и деталей на специальных стендах для определения механических параметров и характеристик, обуславливающих их акустическую активность. Уточняется локализация источников акустической энергии, резонансным и ударным возбуждениями определяются их собственные частоты, исследуются передаточные функции и импедансы и т.п. Методики выполнения таких исследований подробно описаны в работах [1-3, 5, 6, 15, 16].

Результаты исследований используются для идентификации источников акустической энергии в машинах. Высокочастотные вибрации и шум металлорежущих станков, вызванные динамическими процессами в рабочих органах и передачах, имеют случайный характер и при работе машин в стационарном режиме их следует рассматривать как случайный стационарный эргодический процесс.

Стационарность предполагает однородность протекания процесса по времени, инвариантность статистических характеристик по отношению к временному сдвигу. При этом для решения практических задач достаточно слабой стационарности, необходимым и достаточным условием которой является инвариантность корреляционной функции  $R(\tau)$  к временному сдвигу  $\tau$ . Это условие всегда выполняется. Эргодичность предполагает совпадение статистических характеристик, полученных усреднением на ансамбле реализаций, с характеристиками, полученными при усреднении во времени одной реализации. Свойство эргодичности принимается без специальных проверок, поскольку технические процессы им всегда обладают [13, 17].

Металлорежущее оборудование содержит несколько независимых источников акустической энергии. Это механизмы, вибрации деталей в зоне расположения которых с высокой степенью приближения можно считать статистически независимыми. Это позволяет с успехом применять для их локализации корреляционные методы исследования. Возможности корреляционного метода расши-

ряются с учетом случайного характера возбуждения конструкции на средних и высоких частотах, при котором отдельные детали колеблются на собственных частотах и излучение каждого ее элемента независимо.

**Локализация генераторов и излучателей шума.** Акустически активные механизмы выявляются путем последовательного отключения механизмов машины и записи при этом акустических характеристик в сравнении с циклограммами работы механизмов, а также записи и выявления в узкополосных спектрах шума и вибрации максимумов, соответствующих расчетным частотам генерируемых сигналов, анализа характера распределения амплитуд вибрации конструктивных элементов при приближении к механизмам и кинематическим парам, определения коэффициентов взаимной корреляции между виброакустическими процессами механизма и звукоизлучением машины и их взаимных спектров.

Наличие излучателей определяется методами исключения, демпфированием или капсуляцией деталей и механизмов, сравнения узкополосных спектров шума и вибрации, перемножения спектров при анализе взаимных спектров, сравнительной оценки излучаемой энергии по средней величине вибрационных амплитуд или по коэффициенту взаимной корреляции (когерентности) шума и вибрации, измерения диаграмм излучения машины в ближнем поле.

Из приведенных выше методов наиболее удобны в производственных условиях методы отключения, исключения излучателей (при наличии интенсивных локальных излучателей), ближнего поля (при наличии пространственного и частотного их разделения в большинстве машин). Из лабораторных наиболее перспективными являются корреляционный метод и метод взаимных спектров. Они позволяют точно определить энергетический вклад источника в общее звукоизлучение или в вибрационный поток на рассматриваемой детали-излучателе в рассматриваемой полосе частот и выполняются с использованием корреляторов и вычислительной техники.

**Метод отключения** позволяет определить ориентировочно вклад отдельных механизмов в акустическое излучение в порядке убывания их шумности. Конструктивные особенности металлорежущих станков делают этот метод наиболее пригодным для локализации акустически активных механизмов в производственных условиях, так как механизмы с повышенными виброакустическими характеристиками имеют отдельные приводы. По результатам исследования строятся обобщенные спектрограммы уровней шума механизмов, как это показано на рис. 2, для горизонтально-фрезерного станка мод. 6М82 (измерения выполнены при работе на холостом ходу, т.е. без выполнения целевых технологических операций).

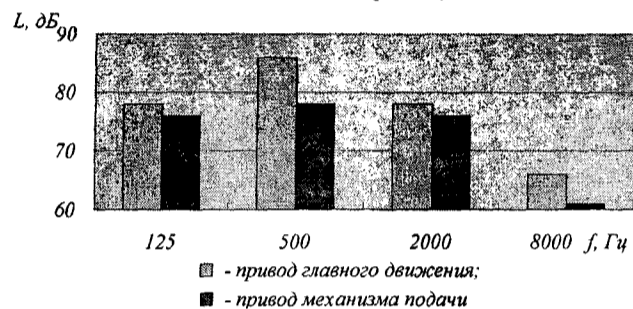


Рис. 2. Спектр УЗМ механизмов горизонтально-фрезерного станка мод. 6М82.

**Метод расчетных частот** позволяет выявить механизмы-генераторы и детали-излучатели акустической энергии и установить частотный диапазон их акустической активности по узкополосным спектрам уровня звукового давления (УЗД) с постоянной шириной полосы анализа  $\Delta f \leq 100$  Гц. Устанавливается совпадение частот максимумов в узкополосном спектре УЗД с частотами возмущающих нагрузок механизмов-генераторов и собственными частотами колебаний деталей-излучателей (для которых также имеются узкополосные спектры вибрации). Это показано на рис. 3 для привода токарно-винторезного станка мод. 16К20, где область возмущающих нагрузок I от механизмов размещена в частотном диапазоне 10-70 Гц, а область II собственных частот деталей лежит в частотном диапазоне 70-10000 Гц.

**Метод ближнего поля** применяется для определения

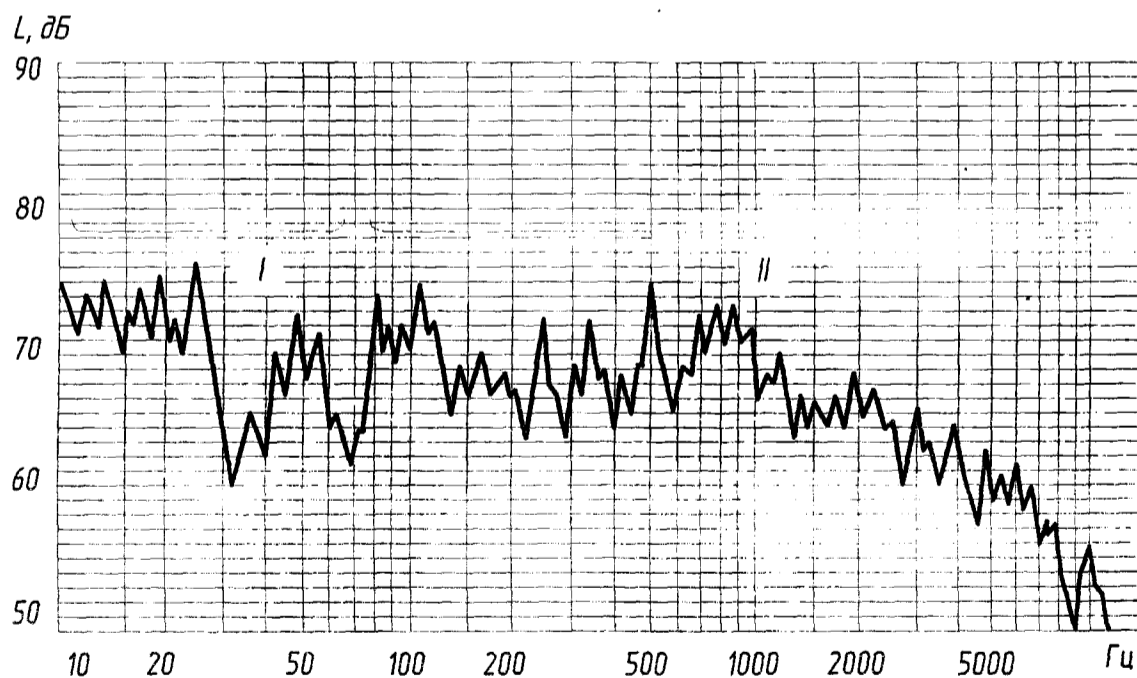


Рис. 3. Узкополосный спектр привода токарно-винторезного станка мод. 16К20 ( $\Delta f = 10$  Гц).

положения интенсивных излучателей шума на машине при исследовании в производственных условиях. По результатам измерений УЗД на линиях, расположенных на расстоянии 0,1 м от наружных поверхностей машины, строятся диаграммы изобар УЗД в плоскостях измерений, откуда видно расположение основных излучателей шума. На рис. 4 показаны зоны повышенных уровней, располагающиеся в приводе токарно-винторезного станка мод. 16К20 (на частоте 0,25 кГц, 1 кГц и уровне звука А).

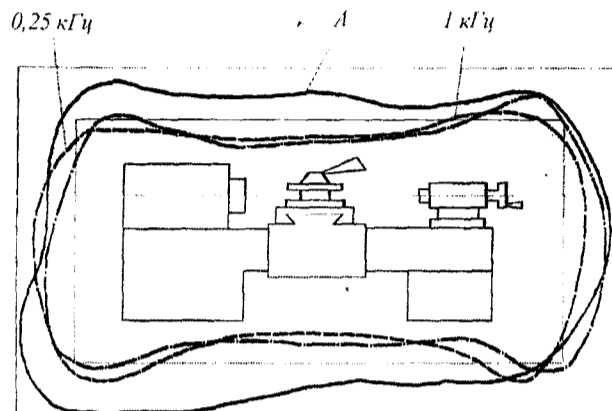


Рис. 4. Диаграмма уровней шума токарно-винторезного станка мод. 16К20.

**Метод фазоположения** позволяет определить положение деталей механизма циклического действия в момент наибольшего их вклада в излучение. В таком случае возможна и энергетическая оценка источника шума.

По этому методу после определения для исследуемого механизма фазы ударного импульса выполняется спектральный анализ. Осциллографирование ударных импульсов выполняется на осциллографах с запоминанием и цифровых анализаторах в реальном времени (оборудованных специализированными компьютерами). Частотный анализ импульсов выполняется на узкополосных анализаторах в реальном времени. Типовая для приводов металлорежущих станков осциллограмма длительности импульса  $\tau$  и спектр виброускорений ударного импульса последовательности с периодом  $t_0$  приведены на рис. 5.

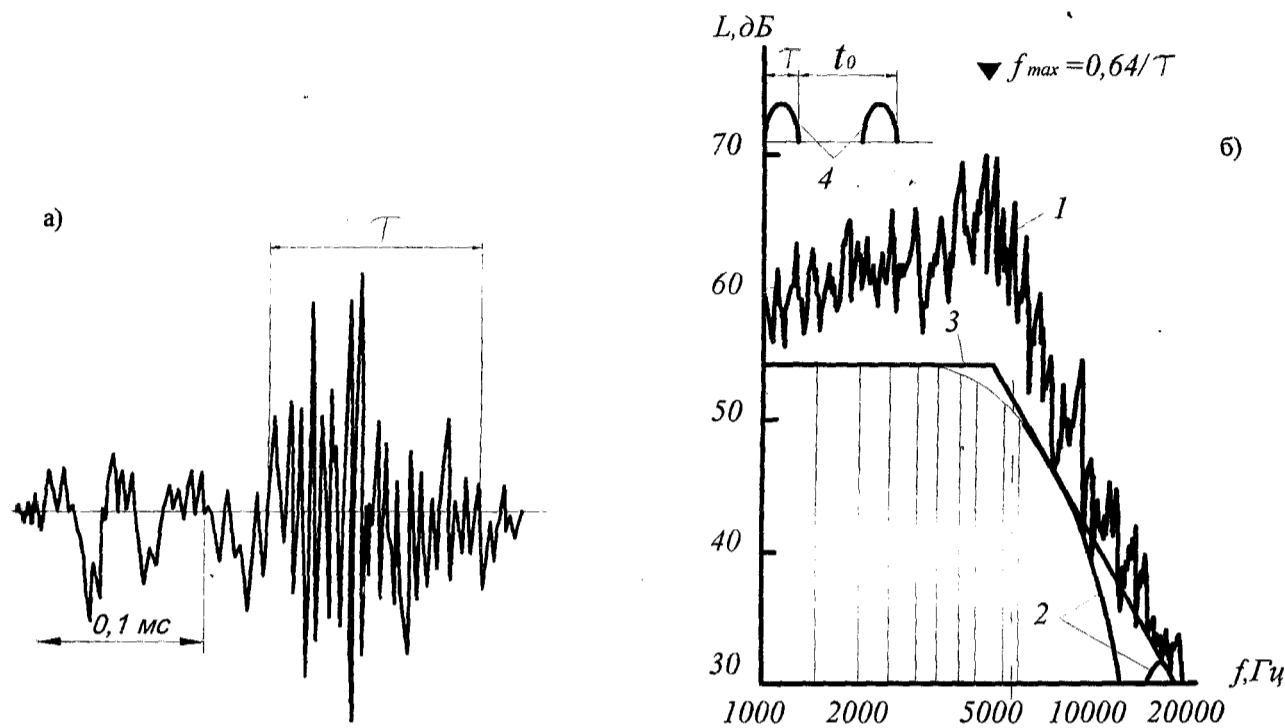


Рис. 5. Осциллограмма (а) и спектр виброускорений ударного импульса (б):

- 1 – экспериментальный мгновенный спектр ( $\Delta f = 25 \text{ Гц}$ );
- 2 – теоретическая спектральная плотность последовательности полусинусоидальных ударных импульсов;
- 3 – ее огибающая;
- 4 – последовательность ударных импульсов.

Спектр ударных импульсов определяется их видом – для приводов металлорежущих станков он близок к полусинусоидальному [13, 17]. Согласно диффузионно-энергетической теории частота начала спада соответствует максимуму в спектрах шума и виброускорений:

$$f_{\max} = \frac{0,64}{\tau} \quad (1)$$

Положение максимума в мгновенном спектре уровней шума и виброускорений в зоне удара позволяет определить длительность соударения  $\tau$ .

Корреляционный метод применяется для определения вклада в общее излучение генераторов и излучателей акустической энергии и дает наилучшие результаты на низких и средних частотах. При этом выполняется одновременная запись на многоканальный измерительный магнитофон звукового и вибрационного процессов в зоне расположения узла, вибрационных процессов на исследуемой детали и звукового процесса в рабочей зоне станка. После обработки записи на корреляторе или специализированном анализаторе устанавливаются величины нормированных взаимных корреляционных функций  $r_{xy}(\tau)$  в исследуемой частотной полосе для выявленного основного канала возбуждения в полосе частот  $\Delta f$  [1, 2].

Коэффициент корреляции между входным  $x(t)$  и выходным  $y(t)$  сигналами (нормированная функция взаимной корреляции) за время наблюдения  $T$ :

$$r_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2}} = \frac{x(t)y(t+\tau)}{[(x^2(t) + y^2(t+\tau))]^{1/2}} \leq 1, \quad (2)$$

где  $R_{xy}(\tau)$  – функция взаимной корреляции процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ ;  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$  – дисперсии соответственно процессов  $x(t)$ ,  $y(t)$ ;  $\tau$  – временной сдвиг, с.

Дисперсия процесса  $x(t)$  выражается зависимостью

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \right) \int_0^T x^2(t) dt \quad (3)$$

Зависимость  $\sigma_y^2$  аналогична предыдущей.

Вклад мощности сигнала от  $i$ -го источника в общую мощность  $W$  сигнала на выходе в полосе частот  $\Delta f$  выражается для статистически независимых источников уравнением

$$W_i(f) = \alpha r_{iy}^2(\tau_i) W, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий потери корреляции по разным причинам;  $r_{iy}(\tau_i)$  – коэффициент взаимной корреляции для первого главного максимума  $i$ -го источника.

Потери корреляции в зависимости от спектрального состава сигналов возбуждения ограничиваются за счет выбора ширины частотной полосы анализа, а влияние

добротности  $Q = \frac{1}{\eta} Q$  ( $\eta$  – коэффициент потерь структуры) должно быть учтено в соответствии с данными [1] применительно к исследуемым машинам.

Для металлорежущих станков добротность  $Q$  составляет от 190 до 650 [7]. При анализе добротности в третьоктавной полосе частот потери корреляции для металлорежущих станков на частотах до 500 Гц в зависимости от расстояния и характера спектра сигналов обычно незначительны, однако в каждом конкретном случае их следует ограничивать шириной полосы основные максимумы сигналов.

На рис. 6 приведена нормированная взаимная корреляционная функция для виброускорений привода и ограждающей конструкции токарно-винторезного станка мод. 16К20 в третьоктавной полосе частот 500 Гц.

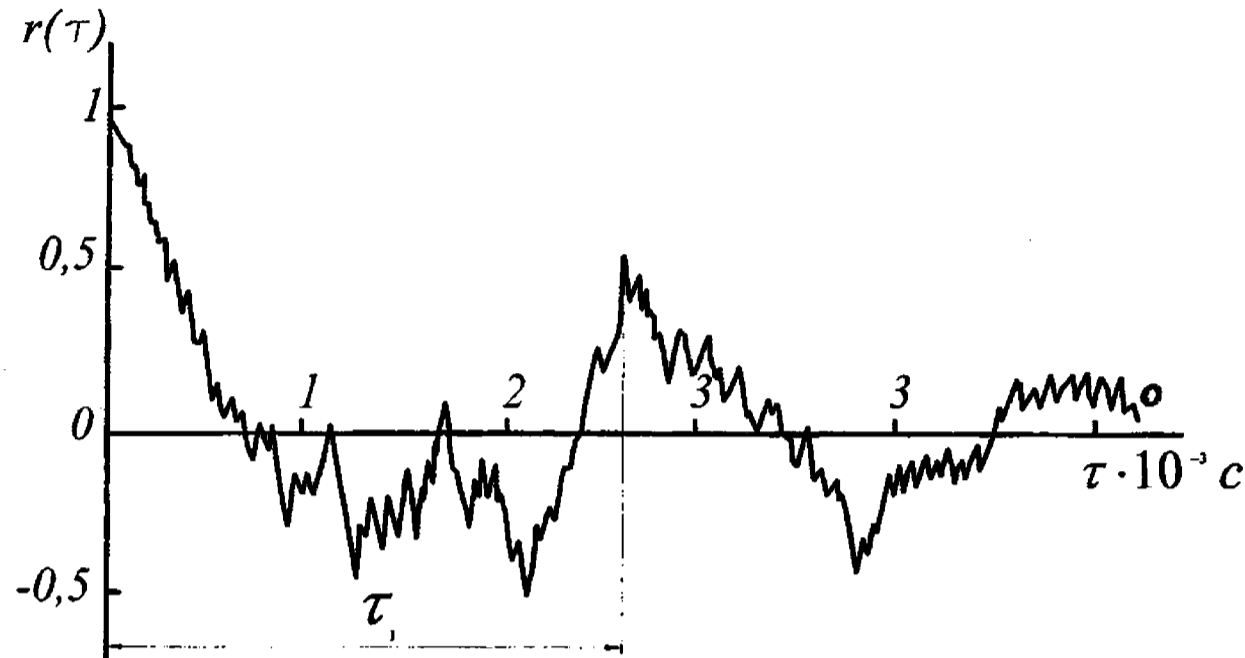


Рис. 6. Нормированная взаимная корреляционная функция  $r_{xy}(\tau)$  виброускорений механического привода и ограждающих конструкций токарно-винторезного станка мод. 16K20.

Величина  $r(\tau_1) = 0,5$  при  $\tau_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  с наблюдается на частоте  $f_n = 400$  Гц. С учетом потери корреляции  $r(\tau_1)$  составляет 0,8, т.е. на этой частоте привод является основным генератором акустической вибрации ограждающей конструкции токарно-винторезного станка.

Метод взаимных спектров применяется для выявления наиболее виброактивных механизмов и деталей-излучателей и их вклада в общее излучение, он наиболее результативен на высоких частотах в условиях больших потерь корреляции. Данный метод позволяет найти функцию когерентности двух сигналов  $\gamma_{xy}^2(f)$ , которая выражает линейную связь случайных сигналов:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f)G_y(f)} \leq 1, \quad (5)$$

где  $G_{xy}(f)$  – взаимная спектральная плотность процессов  $x(t)$ ,  $y(t)$  на входе и выходе (комплексная величина);  $G_x(f)$ ,  $G_y(f)$  – спектральные плотности мощности процессов на входе  $x(t)$  и выходе  $y(t)$  системы.

Спектральные плотности определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} G_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2; \\ G_y(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T y(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2; \\ G_{xy}(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Связь спектральной плотности процесса  $x(t)$  и его текущего спектром  $S(f, t)$  выражается уравнением

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{T} \frac{1}{S(f, t)^2} \right\rangle. \quad (7)$$

Спектральная плотность  $G_i(f)$  вклада  $i$ -го источника в процессе со спектральной плотностью  $G_y(f)$  на выходе определяется уравнением

$$G_i(f) = \gamma_{xy}^2(f) G_y(f). \quad (8)$$

Величина частной когерентности  $\gamma_{xy}^2(f)$  однозначно определяет в соответствующей полосе частот вклад рассматриваемого сигнала. Как видно из сравнения с формулой (4),  $\gamma_{xy}^2(f)$  является аналогом квадрата коэффициента корреляции для узкой полосы частот.

При вычислениях коэффициентов когерентности учитывается смещение их значения к единице, так как в среднем они всегда завышены. Причина смещения (при слишком широкой разрешающей полосе частот по сравнению с шириной максимумов в спектрах) устраняется при вычислениях с помощью усреднения и сплаживания.

На рис. 7 показаны функции когерентности виброускорений корпусных элементов коробки скоростей вертикально-сверлильного станка мод. 2Н135 и излучаемого ими шума (при  $\Delta f = 10$  кГц). Высокие значения максимумов для сигналов шум – вибрация (кривая 1) свидетельствуют о значительном вкладе этих деталей в излучение, а малые значения  $\gamma_{xy}^2(f)$  для виброускорений деталей (кривая 2) характеризуют независимость колебаний в высокочастотном диапазоне.

Таким образом, металлорежущее оборудование, имеющее сложные кинематические и конструктивные особенности, содержит несколько независимых источников акустической энергии. Это механизмы, вибрации деталей в зоне расположения которых с высокой степенью приближения можно считать статистически независимыми, что позволяет с успехом применять для их локализации рассмотренные выше методы исследования.

1. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. – М.: Наука, 1979.

2. Бендят Дж., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983.



Рис. 7. Функции когерентности виброускорений вертикально-сверлильного станка мод. 2Н135.

3. Вибрации в технике. Измерения и испытания. — Т.5/ под ред. М.Д. Генкина. — М.: Машиностроение, 1981.  
 4. Влияние рабочего процесса на шумообразование полуавтомата для изготовления сетки из стального листа / А.Н. Чукарин, Г.В. Самодуров, А.А. Феденко // Новое в экологии и безопасности жизнедеятельности: Труды междунар. эколог. Конгресса, 14-16 июня. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2000. — Т. 2. — С.226-229.  
 5. Клюкин И.И., Колесников А.Е. Акустические измерения в судостроении. — Л.: Судостроение, 1966.  
 6. Клюкин И.И., Колесников А.Е. Акустические измерения в судостроении. — 3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Судостроение, 1982.  
 7. Медведев А.М., Литовка Г.В. Исследование с помощью универсальной установки вибропоглощающих характеристик металлорежущих станков // Обработка металлов. — Новосибирск, 2007. — № 4 (37).  
 8. Месхи Б.Ч. Виброакустические характеристики широкоуниверсальных фрезерных станков // Изв. вузов. Машиностроение. — 2004. — № 3. — С.45-51.  
 9. Месхи Б.Ч. Оценка шумовой обстановки на рабочих местах ОАО «Рубин» // Безопасность жизнедеятельности. — 2004. — № 3. — С.19-20.  
 10. Месхи Б.Ч. Шумообразование при работе дисковых и отрезных фрез // Изв. вузов. Сев.-Кавказского региона. Техн. науки. — 2003. — № 5. Приложение. — С.71-74.  
 11. Месхи Б.Ч. Улучшение условий труда операторов металлорежущих и деревообрабатывающих станков за счет снижения шума в рабочей зоне (теория и практика). — Ростов н/Д.: ДГТУ, 2003.  
 12. Месхи Б.Ч. О расчете уровней шума в рабочей зоне операторов металло- и деревообрабатывающего оборудования // Вестник ДГТУ. — 2004. — Т. 4, № 1 (19). — С. 92-98.  
 13. Павлов Б.В. Акустическая диагностика механизмов. — М., 1971.  
 14. Пищиков В.Д., Розанов А.Ф. Текстильное машиностроение в России: состояние, проблемы, перспективы // — М.: Текстильная промышленность. — 2001. — № 6. — С.14-16.  
 15. Постников О.К. Виброакустическая диагностика полиграфического оборудования. — М., 1984.  
 16. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара: Справочник/ под ред. В.В.Клюева. — М., 1978.  
 17. Харрис С.М., Крид Ч.И. Справочник по ударным нагрузкам. — Л., 1978.

Н.Н. Кушнирук

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ МОДИФИЦИРОВАННОГО ФУНКЦИОНАЛА ЛАГРАНЖА В ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ТРЕНИЕМ**

*The article is devoted semicoercive model problem with friction. Nondifferentiable functional unconditional minimization, arising in a model friction problem is reduced to differentiable functional conditional minimization. A dual scheme, based on modified Lagrangian functional, is used for solution obtained.*

В статье исследуется модельная задача с трением. Задача безусловной минимизации недифференцируемого функционала сводится к задаче условной минимизации дифференцируемого функционала. Для решения ее в новой постановке применяется схема двойственности, основанная на модифицированном функционале Лагранжа.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $R^2$  с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ . Рассмотрим задачу [1]

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma} g |v| d\Gamma \rightarrow \min, \\ v \in W_2^1(\Omega), \end{cases} \quad (1)$$

где  $f \in L_2(\Omega)$  — перепад давления;  $g = \text{const} > 0$  — сила трения на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ ;  $\gamma v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$  — след функции  $v \in W_2^1(\Omega)$  на  $\Gamma$ .

Для решения задачи в новой постановке ранее (см. [2]) был применен метод итеративной проксимальной регуляризации.

Данная задача является идеализированным вариантом одной из задач, встречающихся в теории упругости. Решение описывает движение жидкости в бесконечной трубе с поперечным сечением  $\Omega$  с заданным трением на границе  $\Gamma$ .

Известно, что задача (1) допускает постановку в виде вариационного неравенства

$$\begin{cases} v \in W_2^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla (u-v) d\Omega - \int_{\Omega} f(u-v) d\Omega + \int_{\Gamma} g(|\gamma u| - |\gamma v|) d\Gamma \geq 0 \\ \forall u \in W_2^1(\Omega). \end{cases}$$

Если предположить, что решение  $v \in W_2^1(\Omega)$ , то решение задачи (1) эквивалентно решению краевой задачи:

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{в } \Omega, \\ \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| \leq g, \quad v \frac{\partial v}{\partial n} + |v|g = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases}$$