

Математика. Прикладная математика. Механика

В.В. Сельвинский

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ В ОКРЕСТНОСТИ ОСИ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ШЕРОХАТОЙ ПЛОСКОСТИ

In this article the motion of the particle on the rough work plane is considered. The motion is in the neighbourhood of the axis of the angle vibrations of the work plane. The axis is in the same plane and has an incline with a horizontal line. The conditions of the stability of this motion are given.

Если твердое тело касается шероховатой плоскости тремя точками и трение во всех точках одинаково, то поступательные колебания плоскости будут вызывать поступательное движение твердого тела. Этот случай мало отличается от движения материальной частицы, широко известного в научной литературе. Гораздо менее изученным является случай угловых колебаний плоскости. На практике угловые колебания рабочего органа вибрационных машин считаются нежелательными, так как в общем случае дестабилизируют основное движение объекта обработки. Тем не менее угловые колебания неизменно сопровождают любые направленные колебания рабочего органа, по крайней мере – как побочные, и являются причиной возникновения главного момента переносных сил инерции, оказывающего воздействие на вращательную часть движения твердого тела.

Движение центра масс твердого тела в первом приближении соответствует движению материальной частицы при тех же колебаниях плоскости. Поэтому с целью исследовать устойчивость траектории центра масс твердого тела рассмотрим материальную частицу D (рис. 1), совершающей угловые колебания относительно оси Ox по закону

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t,$$

где α_0 , ω – амплитуда и частота колебаний плоскости; t – время. Сама ось Ox наклонена под углом γ к горизонту и совпадает с линией наибольшего ската шероховатой плоскости в ее среднем положении.

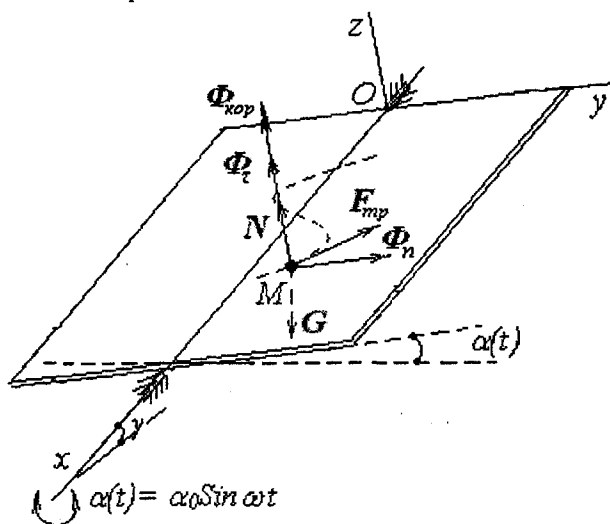


Рис. 1. Схема сил, действующих на материальную частицу при угловых колебаниях шероховатой плоскости.

Относительное движение частицы происходит под действием силы тяжести **G**, нормальной реакции плоскости **N**, силы трения **F_{mp}**, к которым необходимо добавить переносные силы инерции

$$\Phi_t = m\ddot{\alpha}(zy_0 - yz_0), \quad \Phi_n = m\dot{\alpha}^2(yy_0 + zz_0)$$

и кориолисову силу инерции

$$\Phi_{kop} = 2m\dot{\alpha}(\dot{z}y_0 - \dot{y}z_0).$$

Здесь m – масса частицы; $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ – угловая скорость и угловое ускорение плоскости; x , y , \dot{x} , \dot{y} – координаты и проекции скорости частицы в системе координат $Oxyz$, связанной с плоскостью; x_0 , y_0 , z_0 – единичные орты осей $Oxyz$. Уравнения, определяющие состояние материальной частицы, имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin \gamma + F_{mpx}, \\ m\ddot{y} &= -mg \cos \gamma \sin \alpha + mz\ddot{\alpha} + m\dot{\alpha}^2 + 2m\dot{z}\dot{\alpha} + F_{mpy}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$m\ddot{z} = -mg \cos \gamma \cos \alpha + N - m\dot{\alpha}^2 + mz\dot{\alpha}^2 - 2m\dot{y}\dot{\alpha}.$$

Здесь сила трения подчиняется закону Амонтона-Кулона: если скорость частицы отлична от нуля, $v \neq 0$, то

$$F_{mp} = -f \cdot N \cdot v_0,$$

где $v_0 = \frac{v}{|v|}$ – единичный вектор направления скорости частицы; f – коэффициент трения скольжения.

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве характерного времени период угловых колебаний шероховатой плоскости $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а в качестве характерной

длины – величину $L = \frac{g \cdot \cos \gamma}{\omega^2}$:

$$\tau = 2\pi \cdot \frac{t}{T} = \omega \cdot t \text{ – время; } \tilde{x} = \frac{x}{L}; \tilde{y} = \frac{y}{L}; \tilde{z} = \frac{z}{L} \text{ – координаты частицы; } \alpha' = \frac{\dot{\alpha}}{\omega}, \alpha'' = \frac{\ddot{\alpha}}{\omega^2} \text{ – угловая скорость}$$

и угловое ускорение плоскости; $\tilde{x}' = \frac{\dot{x}}{L\omega}; \tilde{y}' = \frac{\dot{y}}{L\omega}$

и $\tilde{z}' = \frac{\dot{z}}{L\omega}$ – проекции скорости частицы; $\tilde{x}'' = \frac{\ddot{x}}{L\omega^2}$

$\tilde{y}'' = \frac{\ddot{y}}{L\omega^2}; \tilde{z}'' = \frac{\ddot{z}}{L\omega^2}$ – проекции ускорения частицы;

$\tilde{N} = \frac{N}{mg \cdot \cos \gamma}, \tilde{F}_{mp} = \frac{F_{mp}}{mg \cdot \cos \gamma}$ – действующие силы.

Тогда уравнения (1) преобразуются (далее «волну» над безразмерными переменными для краткости записи опускаем):

$$\begin{aligned} x'' &= \tau g \gamma + F_{mpx}; \\ y'' &= -\sin \alpha + z\alpha'' + y\alpha'^2 + 2z'\alpha' + F_{mpy}; \\ z'' &= -\cos \alpha - y\alpha'' + z\alpha'^2 - 2y'\alpha' + N. \end{aligned} \quad (2)$$

Во время полета в этих уравнениях нужно полагать:
 $N = F_{\text{мрх}} = F_{\text{мрy}} = 0$.

При безотрывном движении $z = z' = z'' = 0$ уравнения (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} x'' &= tg\gamma + F_{\text{мрx}}; \\ y'' &= -Sin\alpha + y\alpha'^2 + F_{\text{мрy}}; \\ N &= Cos\alpha + y\alpha'' + 2y'\alpha' > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом

$$F_{\text{мрx}} = -f \cdot N \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \quad F_{\text{мрy}} = -f \cdot N \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Условие относительного покоя имеет вид

$$x' = y' = 0, \quad |F_{\text{мр}}| = \sqrt{F_{\text{мрx}}^2 + F_{\text{мрy}}^2} < fN; \quad (4)$$

при этом, как следует из (2):

$$\begin{aligned} F_{\text{мрx}} &= -tg\gamma; \\ F_{\text{мрy}} &= Sin\alpha - y\alpha'^2; \\ N &= Cos\alpha + y\alpha''. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее рассмотрим безотрывное движение частицы. С целью определения общих закономерностей полагаем сначала $y = 0$, т.е. движение частицы прямолинейное вдоль оси Oy ; угловые колебания считаем малыми настолько, что $Sin\alpha \approx \alpha$, $Cos\alpha \approx 1$.

Исследуем относительный покой частицы как состояние, предшествующее ее возможному скольжению. Для определенности будем полагать $y \geq 0$. Анализ условия безотрывности $N > 0$ из (3) показывает, что частица не будет отрываться от плоскости до тех пор, пока она находится в области

$$Y = y \cdot \alpha_0 < 1. \quad (6)$$

В зависимости от фазы колебаний плоскости первоначально покоящаяся частица может начать движение либо в положительном, либо в отрицательном направлении оси Oy . Частица не будет перемещаться в положительном направлении оси Oy из состояния покоя, если $F_{\text{мрy}} > -f \cdot N$. В этом случае получаем из (5)

$$y\alpha'^2 - \alpha < f(y\alpha'' + 1),$$

что с учетом

$$\alpha = \alpha_0 Sin\tau, \quad \alpha'^2 = \alpha_0^2 - \alpha^2, \quad \alpha'' = -\alpha,$$

эквивалентно положительности квадратного трехчлена:

$$h_1(a) \equiv Ya^2 + (a_0 - Y)a + a_0(1 - Ya_0) > 0,$$

где

$$a = \alpha / f, \quad a_0 = \alpha_0 / f.$$

Квадратный трехчлен $h_1(a)$ положителен при $|a| \leq a_0$, если выполняется одно из условий:

$$\text{а) } D \leq 0; \quad \text{б) } a_0 \leq a_1; \quad \text{в) } a_2 \leq -a_0,$$

где

$$D = (a_0 - Y)^2 - 4Ya_0(1 - Ya_0)$$

– дискриминант трехчлена $h_1(a)$;

$$a_{1,2} = (Y - a_0 \pm \sqrt{D}) / 2Y$$

– действительные корни трехчлена $h_1(a)$ ($a_1 \leq a_2$).

Условие а) выполняется, если:

$$\frac{a_0}{3 + 2\sqrt{2 - a_0^2}} < Y < \frac{a_0}{3 - 2\sqrt{2 - a_0^2}}; \quad (7)$$

условие б) выполняется, если:

$$\frac{a_0}{1 - 2a_0} < Y < a_0 + 1, \quad a_0 < \frac{1}{2}; \quad (8)$$

условие в) выполняется, если:

$$a_0 - 1 < Y < \frac{a_0}{1 + 2a_0}. \quad (9)$$

Частица не будет перемещаться в отрицательном направлении оси Oy , если $F_{\text{мрy}} < fN$. В этом случае

$$-f(y\alpha'' + 1) < y\alpha'^2 - \alpha,$$

что эквивалентно отрицательности квадратного трехчлена:

$$h_2(a) \equiv Ya^2 + (a_0 + Y)a - a_0(1 + Ya_0) < 0;$$

последнее неравенство выполняется при $|a| \leq a_0$, если $Y < 1 - a_0$. (10)

Неравенства (6)-(10) разбивают плоскость параметров Y, a_0 на области (рис. 2): 1 – область, где происходит отрыв частицы от плоскости; 2 – область, в которой первоначально покоящаяся частица может двигаться только по направлению к оси колебаний; 3 – область относительного покоя; 4 – область, в которой направление движения первоначально покоящейся частицы зависит от фазы колебаний плоскости. Для отрицательных Y расположение одноименных областей симметрично относительно оси a_0 .

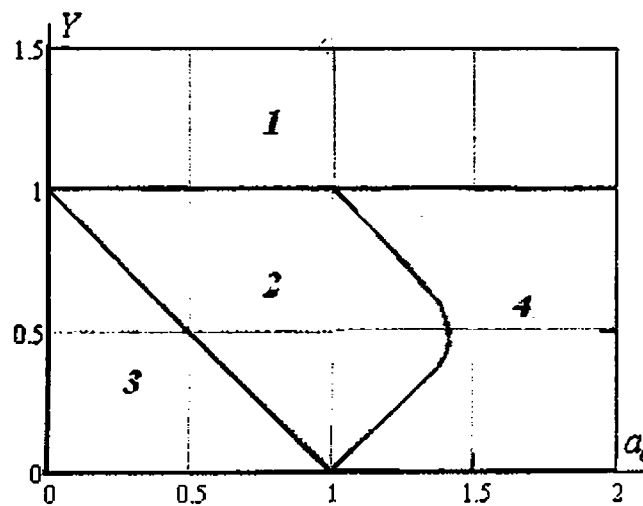


Рис. 2. Зоны возможного состояния первоначально покоящейся материальной частицы в окрестности оси колебаний.

На основании изложенного можно сделать вывод:

если $a_0 < 1$, то частица, помещенная в область безотрывности, начинает перемещаться (возможно, с остановками) к оси колебаний до тех пор, пока не достигнет области покоя, в которой движение частицы прекращается;

если $a_0 \geq 1$, то возможны режимы движения, при которых частица скользит в обоих направлениях в окрестности оси колебаний, не покидая области безотрывности.

Исследуем возможность существования установившихся периодических режимов движения частицы. При $a_0 \ll 1$ движение ее может состоять из следующих этапов: скольжение в отрицательном направлении оси Oy ($y' < 0$), скольжение в положительном направлении оси Oy ($y' > 0$), относительный покой ($y' = 0$). Во время установившегося движения частицы указанные этапы периодически сменяют друг друга.

Сначала рассмотрим случай, в котором сила трения и нормальная реакция велики по сравнению с силами инерции так, что последними можно пренебречь. Это будет справедливо при выполнении условий: $|Y| \ll 1, |Y'| \ll 1$. Тогда уравнение движения из (2) в безразмерных переменных Y, τ имеет вид ($z = z' = 0, F_{\text{мрy}} = -f \cdot N \cdot \text{Sign}Y'$):

$$Y'' = -a_0 f^2 (a_0 Sin\tau + \text{Sign}Y'), \quad Y' \neq 0. \quad (11)$$

На этапах покоя:
 $|a_0 \text{Sint}| \leq 1, Y' = 0$.
 Исследуем возможность существования 2π -периодического решения уравнения (11) с моментами переключений: τ_1 – фаза начала движения частицы в отрицательном направлении оси Oy ; τ_2 – фаза остановки; τ_3 – фаза начала движения частицы в положительном направлении оси Oy ; τ_4 – фаза остановки; при этом $\tau_3 = \tau_1 + \pi, \tau_4 = \tau_2 + \pi$.
 Решение уравнения (11) на каждом этапе имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau_1 < \tau < \tau_2, Y' &= \alpha_0^2 (\text{Cost} - \text{Cost}_1) + a_0 f^2 (\tau - \tau_1), \\ Y &= Y_1 + \alpha_0^2 (\text{Sint} - \text{Sint}_1) - \alpha_0^2 (\tau - \tau_1) \text{Cost}_1 + \\ &+ \frac{a_0 f^2}{2} (\tau - \tau_1)^2; \\ \tau_2 < \tau < \tau_3, Y &\equiv Y_2 = Y_1 + a_0^2 (\text{Sint}_2 - \text{Sint}_1) - \\ &- a_0^2 (\tau_2 - \tau_1) \text{Cost}_1 + \frac{a_0 f^2}{2} (\tau_2 - \tau_1)^2; \\ \tau_3 < \tau < \tau_4, Y' &= \alpha_0^2 (\text{Cost} - \text{Cost}_3) - \\ &- a_0 f^2 (\tau - \tau_3), \\ Y &= Y_3 + \alpha_0^2 (\text{Sint} - \text{Sint}_3) - \alpha_0^2 (\tau - \tau_3) \text{Cost}_3 - \\ &- \frac{a_0 f^2}{2} (\tau - \tau_3)^2; \\ \tau_4 < \tau < \tau_1 + 2\pi, Y &\equiv Y_4 = Y_3 + a_0^2 (\text{Sint}_4 - \text{Sint}_3) - \\ &- a_0^2 (\tau_4 - \tau_3) \text{Cost}_3 - \frac{a_0 f^2}{2} (\tau_4 - \tau_3)^2; \end{aligned} \quad (12)$$

фаза τ_1 определяется из равенства:

$$a_0 \text{Sint}_1 = 1; \quad (12)$$

фаза τ_2 определяется из условия $Y' = 0$:

$$a_0 (\text{Cost}_2 - \text{Cost}_1) + \tau_2 - \tau_1 = 0. \quad (13)$$

При этом должно быть:

$$|a_0 \text{Sint}_2| < 1, \quad (14)$$

иначе периодическое движение становится невозможным. В предельном случае $\tau_2 = \tau_1 + \pi$, и из (13) следует:

$$\text{Cost}_2 = -\frac{\pi}{2a_0},$$

что, с учетом (12), будет выполняться при $a_0 = \sqrt{1 + \pi^2/4}$. Если $1 < a_0 < \sqrt{1 + \pi^2/4}$, то этапы скольжения чередуются с этапами покоя. Равенства (12), (13) определяют моменты перехода τ_1, τ_2 от одного этапа к другому. Амплитуда перемещения частицы в этом случае имеет вид:

$$|Y_2 - Y_1| = \frac{a_0 f^2}{2} (1 - a_0 \sin \tau_2)^2. \quad (15)$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$|Y_2 - Y_1| < 2a_0^2,$$

что оправдывает предположение о малости Y .

Исследуем влияние сил инерции

$$\Phi_n = y\alpha'^2 = \alpha_0 Y \cos^2 \tau,$$

$$\Phi_t = y\alpha'' = -Y \sin \tau,$$

$$\Phi_{\text{кор}} = 2y'\alpha' = 2Y' \cos \tau$$

на устойчивость рассмотренного выше установившегося движения частицы в окрестности оси колебаний ($Y \ll 1$). Здесь устойчивость движения понимается в смысле малости отклонения частицы от оси колебаний. Запишем полное уравнение движения из (3) в безразмерных переменных (по-прежнему считаем $\gamma = 0, \text{Sina} \approx a, \text{Cosa} \approx 1$):

$$\begin{aligned} Y'' &= -a_0 f^2 (a_0 \text{Sint} + \text{Sign} Y') + a_0^2 f^2 Y \cdot \text{Cos}^2 \tau + \\ &+ a_0 f^2 Y \cdot \text{Sint} \text{Sign} Y' - 2a_0 f^2 \text{Cost} |Y'|. \end{aligned} \quad (16)$$

При интегрировании будем считать: за период колебаний Y изменяется очень медленно, так что практически можно полагать Y постоянным; закон изменения скорости Y' незначительно отличается от закона изменения скорости рассмотренного установившегося движения, – в частности, фазы $\tau_p, \tau_z, \tau_y, \tau_s$ перехода от одного этапа движения к другому будем считать такими же, как и для установившегося движения.

При сделанных предположениях среднее за период ускорение частицы получаем из (16) в виде:

$$Y_{cp}'' = \frac{\alpha_0^2 Y}{4\pi} [2(\tau_2 - \tau_1)(1 - \frac{2}{a_0}) + \text{Sin}2\tau_2 - \text{Sin}2\tau_1]; \quad (17)$$

фазы τ_p, τ_z определяются из уравнений (12), (13).

На рис. 3 приведены результаты численного решения уравнений (12), (13) и графики приведенной средней равнодействующей сил:

$$R_{\alpha_0} = \frac{4\pi}{\alpha_0^2 Y} Y_{cp}''(a_0)$$

– в зависимости от коэффициента трения f , но при фиксированной амплитуде угловых колебаний плоскости α_0 ;

$$R_f = \frac{4\pi}{f^2 Y} Y_{cp}''(a_0)$$

– в зависимости от α_0 , но при фиксированном f .

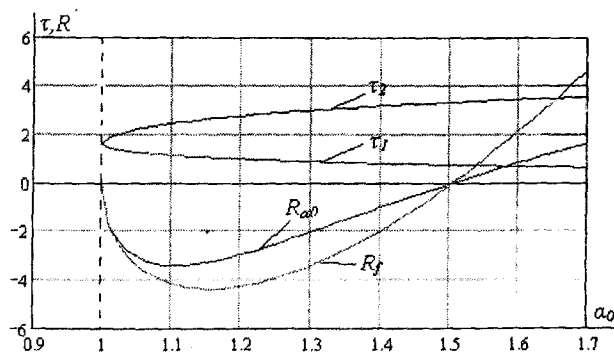


Рис. 3. Графики фаз перехода от одного этапа движения к другому (τ_p, τ_z) и средних равнодействующих (R_f, R_{α_0}).

Анализ графика R_{α_0} показывает, что группа частиц с различными коэффициентами трения должна при данном α_0 разделиться на два потока (в окрестности оси колебаний): на приближающийся к оси колебаний, для которого $a_0 < 1,51$, и удаляющийся от оси, для которого $a_0 > 1,51$. Это явление может быть использовано в процессах разделения частиц на фракции.

Анализ графика R_f показывает, что наиболее сильно явление устойчивости установившегося движения для данной частицы проявляется при тех значениях параметров колебаний, для которых $\beta_0 \approx 1,16$. Этот эффект можно использовать с целью стабилизации положения твердого тела при обработке.

Более конкретно характер устойчивости движения частицы отражается экспоненциальным показателем в зависимости среднего за период T отклонения Y_{cp} частицы от оси колебаний:

$$\beta = \frac{Y_{cp}'}{Y_{cp} - B_0}. \quad (18)$$

Это эквивалентно представлению:

$$Y_{cp} = A_0 \cdot e^{\beta t} + B_0;$$

здесь A_0, B_0 – коэффициенты, определяемые начальными условиями и параметрами системы. Если $\beta > 0$, то Y_{cp} не-

ограниченно возрастает по величине, т.е. при соответствующих начальных условиях частица в среднем удаляется от оси колебаний; если $\beta < 0$ и $B_0 = 0$, то частица приближается к оси колебаний, причем по величине в характеризует интенсивность этого приближения; если $\beta < 0$ и $B_0 \neq 0$, то центр колебаний частицы смещен относительно оси колебаний на величину $Y = B_0$.

На рис. 4 приведен график численного решения полного уравнения из (3) при $\gamma = 0$ с начальными условиями $Y = 0.2$; $Y' = 0$:

$$Y'' = -\alpha_0(\text{Sin}(\alpha_0 \text{Sint}) + f \cdot \text{Cos}(\alpha_0 \text{Sint}) \text{Sign} Y') + \alpha_0^2 Y \cdot \text{Cos}^2 \tau + \alpha_0 f \cdot Y \cdot \text{Sint} \text{Sign} Y' - 2\alpha_0 f \cdot \text{Cost} |Y'|$$

с учетом возможности периодических остановок, определяемых условиями (4), (5). Решение выполнено на основе математического пакета MathCad 13 с помощью встроенной функции *rkfixed*.

Для массива средних значений Y функция *expfit* дает экспоненциальное приближение с параметрами $A_0 = 0.186$, $B_0 = -2.1 \cdot 10^{-4}$, $\beta = -3.762 \cdot 10^{-3}$. Для установившихся режимов движения частицы на рис. 5 представлены следующие зависимости от параметра α_0 : а) фазы чередующихся этапов скольжения и покоя $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$; б) амплитуду

колебаний A ; в) смещение D среднего значения координаты Y относительно оси колебаний; г) параметр β .

Анализ полученных зависимостей приводит к выводу: режимы установившегося движения материальной частицы в окрестности оси колебаний происходят примерно при $1 < \alpha_0 < 2$; при $\alpha_0 < 1.05$ частица останавливается на некотором расстоянии от оси, при $\alpha_0 > 2$ частица в среднем удаляется от оси колебаний, покидая зону безотрывности движения. Естественно, с ростом α_0 амплитуда A установившихся колебаний растет, максимальное «притяжение» к оси колебаний частица испытывает при $\alpha_0 \approx 1.5$.

Как показывает обработка совокупности численных решений, рассмотренные зависимости τ_i ($i=1, \dots, 4$), A , β практически не зависят от начальных условий, если только эти условия не выводят частицу из зоны безотрывности.

На рис. 6 представлено влияние дополнительного угла наклона γ оси колебаний Ox на характер движения частицы. Заметны следующие тенденции: смещение интервала устойчивости в сторону уменьшения значений α_0 по мере увеличения угла γ ; рост амплитуды A установившегося смещения частицы относительно оси колебаний и средней скорости транспортирования V_x вдоль оси колебаний с увеличением угла γ .

Из полученных результатов можно сделать вывод

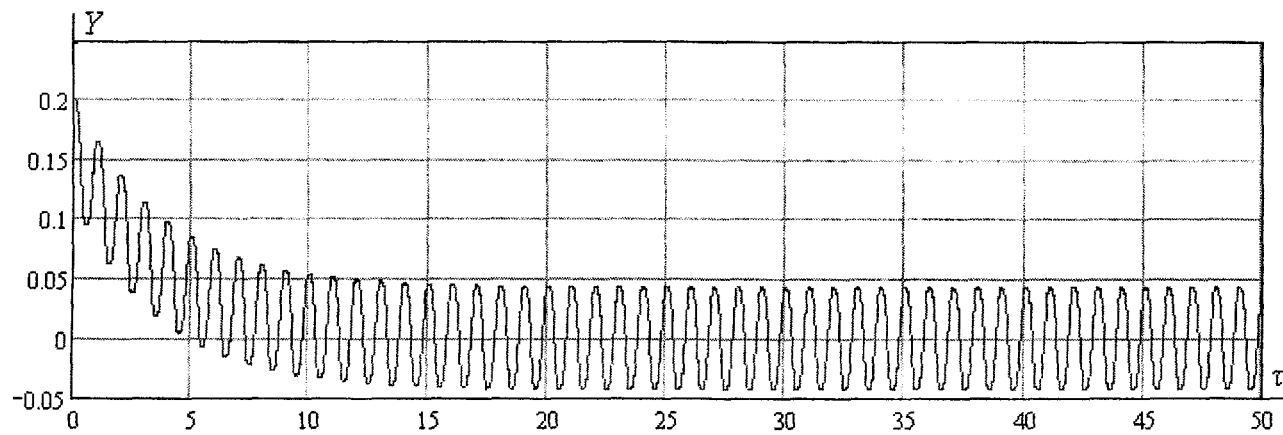


Рис. 4. График численного решения уравнения движения материальной частицы при $f = 0.1$, $\alpha_0 = 1.5$, $\gamma = 0$.

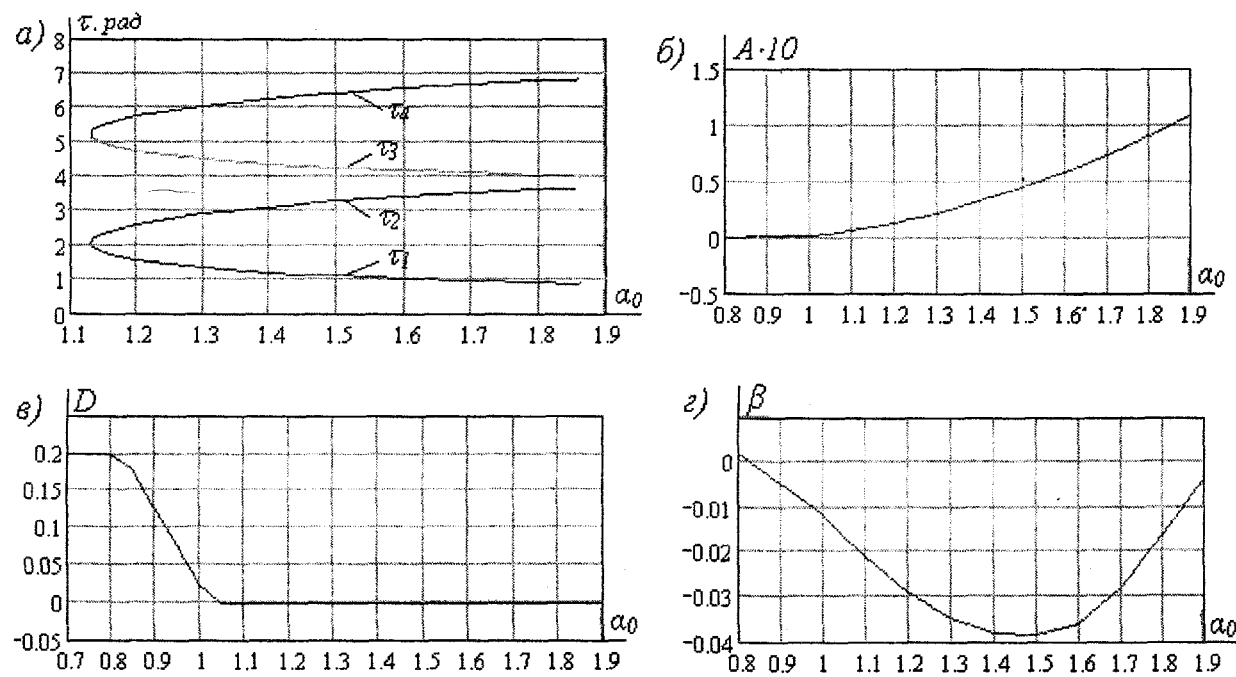


Рис. 5. Зависимости параметров движения материальной частицы при $f = 0.1$, $\gamma = 0$.

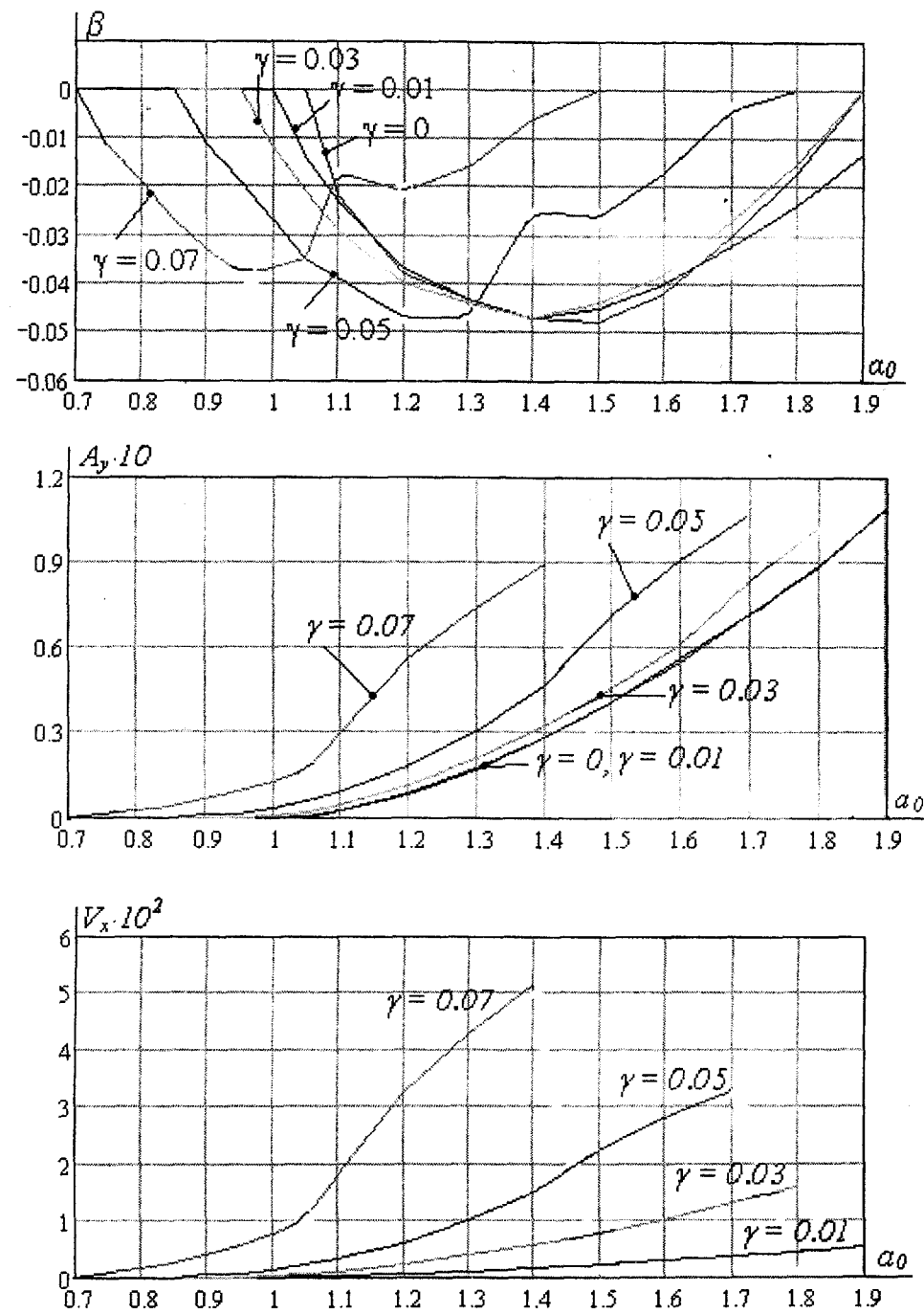


Рис. 6. Зависимости параметров движения материальной частицы при $f=0.1$.

о возможности осуществления следующих технологических процессов:

- а) транспортирование смеси частиц с постепенным разделением частиц на две фракции, коэффициенты трения которых таковы, что фракция, имеющая показатель α_0 меньше критического, приближается к оси, а другая, с показателем α_0 больше критического, — удаляется в зону отрыва и далее;
- б) транспортирование деталей с выраженной динамической асимметрией, при котором происходит постепенное ориентирование деталей за счет неоднородности поля переносных сил инерции в их относительном движении.

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. В 2 т. — М.: Наука, 1983.
2. Сельвинский В.В. Взаимодействие материальной частицы с шероховатой плоскостью, совершающей угловые колебания // Управление механическими системами. — Иркутск, 1986. — С. 156-161.