

Для уточнения результатов необходимо проведение дальнейших испытаний с учетом формы поверхности контакта между костными отломками, структуры костной ткани и ее состава.

1. Стецула В.И., Девятю А.А. Чрескостный остеосинтез в травматологии. Киев: Здоров'я, 1987.

2. Барабаш С.А., Бушманов А.В. Имитационное моделирование деформации фиксирующих устройств как стержневых систем // Информатика и системы управления. – 2009. – № 1(19). – С. 23-27.

3. Соломин Л.Н. Основы чрескостного остеосинтеза аппаратом Г.А. Илизарова: Монография. – СПб.: ООО «МОРСАВ», 2005.

4. Белов Д.В. Механика: Учеб. пособие. – М.: Физический ф-т МГУ; НЭВЦ ФИПГ, 1998.

5. Образцов И.Ф., Хайме М.А. Оптимальные биомеханические системы. – М.: Медицина, 1989.

6. Бушманов А.В. Математическое и компьютерное моделирование фиксирующих устройств в травматологии. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007.

7. Воронин Н.И., Бушманов А.В., Борозда И.В. Аппаратный остеосинтез костей таза. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2000.

8. Дьяконов В. MATLAB 6: учебный курс. – СПб.: Питер, 2001.

А.В. Рыженко

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*In work the mathematical model of experiment is presented, optimum values of entrance parameters at which value of model reaches an optimum are formulated.*

### Введение

Математическое моделирование составляет основу теоретических исследований и обладает рядом несомненных преимуществ, так как, не используя сильных допущений, позволяет получить качественную и количественную информацию о любой стороне моделируемого явления при различных условиях проведения вычислительного эксперимента. На современном уровне развития науки и техники многие исследования в физике, биологии, химии требуют постановки сложных экспериментов. Проблема извлечения наибольшего количества сведений об изучаемых процессах при ограниченных затратах весьма актуальна. В связи с этим необходимы как широкое применение методов, которые давали бы не только способ обработки экспериментальных данных, но и позволяли бы оптимальным образом организовывать эксперимент, так и их реализация на ЭВМ для повешения скорости расчетов.

### Постановка задачи

Рассмотрим применение планирования второго порядка для отыскания максимального значения выходного параметра – предела прочности бетонных образцов. Пусть экспериментом выбраны следующие переменные факторы: 1) удельная поверхность поргланццемента –  $X_1$ , м<sup>2</sup>/кг; 2) содержание минеральной добавки –  $X_2$ , % от массы цемента; 3) содержание заполнителя –  $X_3$ , кг/м<sup>3</sup>, которые варьируют на трех уровнях: основном (0), верхнем (+1) и нижнем (-1). Натуральные значения каждого фактора представлены в табл. 1.

Таблица 1

### Натуральные значения переменных факторов

Переменные факторы	Нижний уровень	Основной уровень	Верхний уровень	Интервал варьирования
$X_1$	230	330	430	100
$X_2$	10	20	30	10
$X_3$	1000	1250	1500	250

Сформулируем математическую модель эксперимента и определим оптимальные значения факторов, при которых выходной параметр – предел прочности при сжатии бетонного образца (МПа) – принимает максимальное значение. При моделировании эксперимента использова-

на полиномиальная экспериментально-статистическая (ЭС) модель, трехфакторный план [2].

### Построение модели

Для получения наиболее эффективной модели принято решение о постановке двух планов – полного и некомпозиционного [1].

1. Полный факторный план. Условия и постановка исходной задачи требуют построения ЭС-модели второго порядка. При планировании по схеме полного факторного эксперимента (ПФЭ) реализуются всевозможные сочетания уровней факторных переменных. Необходимое количество опытов  $N$  для такого эксперимента определяется по формуле  $N = p^k$ , где  $p$  – число уровней факторов;  $k$  – число факторов. Тогда число опытов равно 27. Матрица ПФЭ представлена в табл. 2, в которой  $Y'$ ,  $Y''$  – результаты параллельных опытов.

Обработка результатов осуществляется по следующей схеме [1]:

- 1) оценка дисперсий среднего арифметического в каждой строке матрицы;
- 2) проверка однородности дисперсий с помощью критерия Кохрена;
- 3) расчет оценки дисперсии воспроизводимости, если дисперсии однородны;
- 4) определение коэффициентов регрессии;
- 5) проверка адекватности модели;
- 6) проверка значимости коэффициентов регрессии.

Найденные значения дисперсий среднего арифметического каждого опыта приведены в табл. 3.

Критерий Кохрена  $G = 0.1259$ . Табличное значение для 27 опытов и одной степени свободы равно 0.3002; гипотеза об однородности дисперсий не отвергается [3]. Дисперсия воспроизводимости:  $s^2\{y\} = 0.1470$ .

Оценки коэффициентов регрессии определяются методом наименьших квадратов. Составив матрицу базисных функций от независимых переменных и матрицу-столбец откликов, находим матрицу моментов и матрицу-столбец коэффициентов для модели второго порядка:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & 18 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 12 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & 12 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

Таким образом, подставив найденные матрицы в (1), найдем коэффициенты полинома:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (1)$$

Таблица 2

Матрица полного факторного плана

№ опыта	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y'	Y''	№ опыта	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y'	Y''	№ опыта	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y'	Y''
1	-1	-1	-1	21.0	21.6	10	-1	-1	0	21.1	21.6	19	-1	-1	+1	22.2	22.1
2	0	-1	-1	21.3	21.9	11	0	-1	0	21.3	21.0	20	0	-1	+1	22.0	22.9
3	+1	-1	-1	21.0	21.7	12	+1	-1	0	19.2	19.3	21	+1	-1	+1	20.9	21.9
4	-1	0	-1	16.0	16.3	13	-1	0	0	14.9	15.0	22	-1	0	+1	15.3	16.0
5	0	0	-1	16.3	17.0	14	0	0	0	15.9	16.0	23	0	0	+1	16.5	16.0
6	+1	0	-1	15.4	16.2	15	+1	0	0	14.5	14.4	24	+1	0	+1	15.0	15.8
7	-1	+1	-1	15.4	16.3	16	-1	+1	0	14.4	14.8	25	-1	+1	+1	14.1	14.0
8	0	+1	-1	17.1	17.0	17	0	+1	0	15.1	15.5	26	0	+1	+1	14.6	15.0
9	+1	+1	-1	16.5	16.0	18	+1	+1	0	15.3	15.2	27	+1	+1	+1	13.6	14.2

Таблица 3

Значения дисперсий среднего арифметического

№ опыта	S <sub>i</sub> <sup>2</sup>	№ опыта	S <sub>i</sub> <sup>2</sup>	№ опыта	S <sub>i</sub> <sup>2</sup>
1	0.1800	10	0.1250	19	0.0050
2	0.1800	11	0.0450	20	0.4050
3	0.2450	12	0.0050	21	0.5000
4	0.0450	13	0.0050	22	0.2450
5	0.2450	14	0.0050	23	0.1250
6	0.3200	15	0.0050	24	0.3200
7	0.4050	16	0.0800	25	0.0050
8	0.0050	17	0.0800	26	0.0800
9	0.1250	18	0.0050	27	0.1800

b<sub>1</sub> = 15.6889; b<sub>2</sub> = -0.1694; b<sub>3</sub> = -3.0500; b<sup>3</sup> = -0.3361; b<sub>12</sub> = 0.3042; b<sub>13</sub> = -0.1000; b<sub>23</sub> = -0.6833; b<sub>11</sub> = -0.7417; b<sub>22</sub> = 2.5833; b<sub>33</sub> = 0.7583.

Выделим значимые коэффициенты регрессии и отбросим незначимые.

В доверительный интервал Δb = (-0.1514; 0.1514) попадает значение коэффициента b<sub>13</sub>, который можно не учитывать при построении модели.

С помощью критерия Фишера проверим на адекватность полученную модель объекта. Дисперсия адекватности и критерий Фишера соответственно равны s<sub>ад</sub><sup>2</sup> = 0.1497; F = 1.0184. Табличное значение F-критерия равно 1.67; нет оснований отбрасывать гипотезу адекватности модели [4].

Таким образом, модель ПФЭ имеет вид:

$$y = 15.6889 - 0.1694x_1 - 3.05x_2 - 0.3361x_3 + 0.3042x_1x_2 - 0.6833x_2x_3 - 0.7417x_1^2 + 2.5833x_2^2 + 0.7583x_3^2. \quad (2)$$

Матрица некомпозиционного факторного плана

№ опыта	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y'	Y''	№ опыта	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y'	Y''	№ опыта	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y'	Y''
1	+1	+1	0	15.3	15.2	6	+1	0	+1	15.0	15.8	11	0	+1	+1	14.6	15.0
2	+1	-1	0	19.2	19.3	7	+1	0	-1	15.4	16.2	12	0	+1	-1	17.1	17.0
3	-1	+1	0	14.4	14.8	8	-1	0	+1	15.3	16.0	13	0	-1	+1	22.0	22.9
4	-1	-1	0	21.1	21.6	9	-1	0	-1	16.0	16.3	14	0	-1	-1	21.3	21.9
5	0	0	0	15.9	16.0	10	0	0	0	15.8	16.1	15	0	0	0	15.9	16.8

Рис. 1 графически подтверждает корректность и адекватность модели.

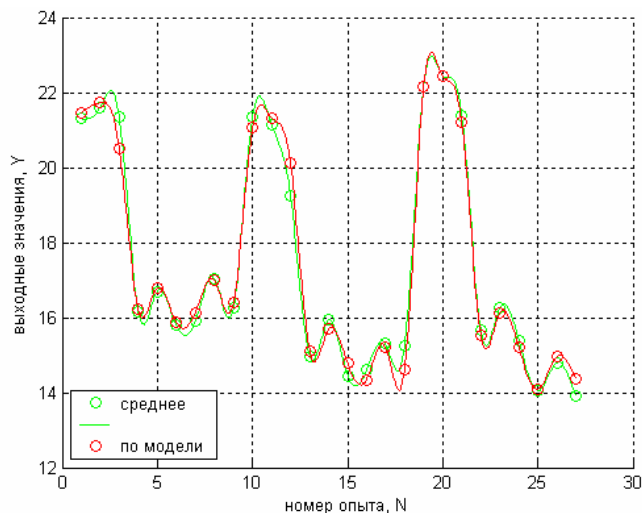


Рис. 1. Экспериментальные и модельные значения выходного параметра.

2. Некомпозиционный факторный план предусматривает проведение 15 опытов. В центре плана, т.е. при нахождении всех факторов на нулевых уровнях x<sub>1</sub> = x<sub>2</sub> = x<sub>3</sub> = 0, предусмотрено проведение трех опытов. Матрица плана представлена табл. 4.

Обработка результатов осуществляется по аналогичной для ПФЭ схеме.

Значения дисперсий среднего арифметического для каждого опыта приведены в табл. 5. Критерий Кохрена G = 0.1784. Табличное значение для 15 опытов и одной степени свободы равно 0.470; гипотеза об однородности дисперсий не отвергается [3]. Дисперсия воспроизводимости s<sub>вп</sub><sup>2</sup> = 0.0533.

Таблица 4

Таблица 5

**Значения дисперсий  
для некомпозиционного плана**

№ опыта	$S_i^2$	№ опыта	$S_i^2$	№ опыта	$S_i^2$
1	0.0050	6	0.3200	11	0.0800
2	0.0050	7	0.3200	12	0.0050
3	0.0800	8	0.2450	13	0.4050
4	0.1250	9	0.0450	14	0.1800
5	0.0050	10	0.0450	15	0.4050

Для оценки коэффициентов регрессии найдем матрицу базисных функций и матрицу-столбец откликов, а затем матрицу моментов и матрицу-столбец коэффициентов:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \end{pmatrix}.$$

Подставив найденные матрицы в (1), получим коэффициенты полинома:

$$b_0 = 16.0833; b_1 = -0.2562; b_2 = -2.8687; b_3 = -0.2875; b_{12} = 0.6875; b_{13} = 0.0250; b_{23} = -0.7750; b_{11} = -0.8479; b_{22} = 2.3771; b_{33} = 0.5146.$$

Для нахождения значимых коэффициентов регрессии определяем доверительный интервал для каждого коэффициента взаимодействия:

$$\Delta b = (-0.5737; 0.5737); \Delta b_i = (-0.3513; 0.3513); \Delta b_{ij} = (-0.4968; 0.4968); \Delta b_{ii} = (-0.5141; 0.5141).$$

Из модели выбывают члены с коэффициентами:  $b_p, b_q, b_{13}$ .

Итоговую модель проверим на адекватность. Дисперсия адекватности и критерий Фишера равны соответственно:  $s_{ад}^2 = 0.0818; F = 1.5345$ . Табличное значение  $F$ -критерия равно 2.79; нет оснований отбрасывать гипотезу адекватности модели.

Модель некомпозиционного факторного эксперимента (НФЭ) имеет вид:

$$y = 16.0833 - 2.8687x_2 + 0.6875x_1x_2 - 0.7750x_2x_3 - 0.8479x_1^2 + 2.3771x_2^2 + 0.5146x_3^2. \quad (3)$$

Рис. 2 подтверждает адекватность модели и корректности вычислений.

**Оптимизация модели**

1. Модель полного факторного плана. При исследовании влияния переменных факторов на прочность бетонного образца получена модель второй степени (2), адекватно описывающая область эксперимента. Для исследования области оптимума необходимо привести полином второго порядка к каноническому виду. На первом этапе

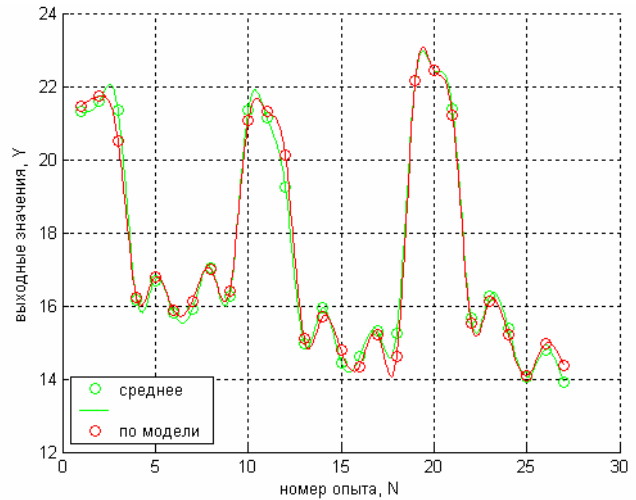


Рис. 2. Экспериментальные и модельные значения выходного параметра для некомпозиционного плана.

находим центр поверхности отклика [1]. Так как определитель системы уравнений, полученной дифференцированием исходного полинома по каждой независимой переменной (фактору):

$$\begin{vmatrix} -1.4834 & 0.3042 & 0 \\ 0.3042 & 5.1666 & -0.6833 \\ 0 & -0.6833 & 1.5166 \end{vmatrix} = -11.0711,$$

отличен от нуля, то начало координат переносится в центр поверхности. Решая систему, найдем координаты центра  $s: \bar{x}_1 = 0.0207, \bar{x}_2 = 0.6576, \bar{x}_3 = 0.5179$ .

В исходном уравнении исчезают члены, содержащие линейные эффекты, и изменяется свободный член:

$$y = 14.5973 + 0.3042\bar{x}_1\bar{x}_2 - 0.6833\bar{x}_1\bar{x}_3 - 0.7417\bar{x}_1^2 + 2.5833\bar{x}_2^2 + 0.7583\bar{x}_3^2.$$

На втором этапе выполняем поворот координатных осей в новом начале координат. Составив и решив характеристическое уравнение:

$$f(B) = \begin{vmatrix} -0.7417 - B & 0.1521 & 0 \\ 0.1521 & 2.5833 - B & -0.3416 \\ 0 & -0.3416 & 0.7583 - B \end{vmatrix} = 0,$$

получаем:  $B_{11} = -0.7417, B_{22} = 2.5833, B_{33} = 0.7583$ ,

$$y - 14.5973 = -0.7417\bar{x}_1^2 + 2.5833\bar{x}_2^2 + 0.7583\bar{x}_3^2.$$

Все коэффициенты отличны от нуля и имеют различные знаки. Следовательно, для увеличения параметра оптимизации необходимо двигаться от центра так, чтобы значения  $\bar{x}_1$  для коэффициента  $B_{11} < 0$  равнялись нулю, т.е. искать максимум вдоль осей с  $B_{22} > 0$  и  $B_{33} > 0$ . Область оптимума характеризуется двуполостным гиперboloидом (рис. 3).

Оптимальные значения факторных переменных, при которых выходной параметр примет максимальное значение, определяем с помощью диссоциативно-шагового метода (ДШМ) [2]. Квазиоднофакторные модели определяются выражениями:

$$W_i = b_i x_i + \sum_{j=2}^{k-1} b_{ij} x_i x_j + b_{ii} x_i^2, \quad i = 1, \dots, (k-1), j = 2, \dots, k. \quad (4)$$

Из модели (2) по формуле (4) имеем три квазиоднофакторные модели:

$$W_1 = (-0.1694 + 0.3042x_2)x_1 - 0.7417x_1^2;$$

$$W_2 = (-3.05 + 0.3042x_1 - 0.6833x_3)x_2 + 2.5833x_2^2;$$

$$W_3 = (-0.3361 - 0.6833x_2)x_3 + 0.7583x_3^2,$$

описывающие семейства парабол (рис. 4):

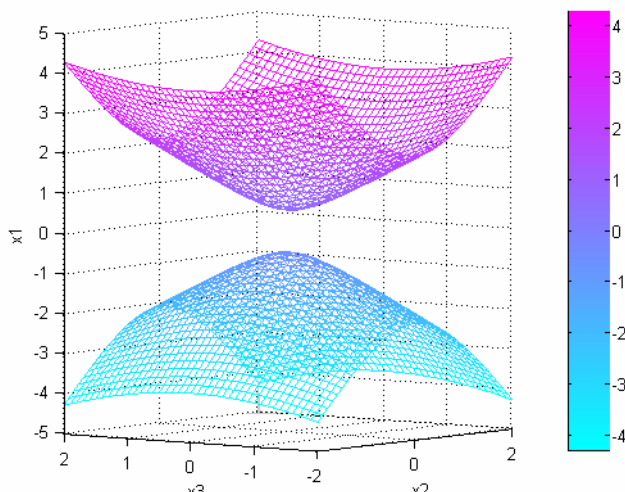


Рис. 3. Область оптимума для модели ПФЭ.

$$W_1 = (-0.1694 \pm 0.3042x_2)x_1 - 0.7417x_1^2;$$

$$W_2 = (-3.05 \pm 0.9875)x_2 + 2.5833x_2^2;$$

$$W_3 = (-0.3361 \pm 0.6833x_2)x_3 + 0.7583x_3^2;$$

с граничными положениями:

$$-0.4736 \leq b_1 \leq 0.1348;$$

$$-4.0375 \leq b_2 \leq -2.0625;$$

$$-1.0193 \leq b_3 \leq 0.3472.$$

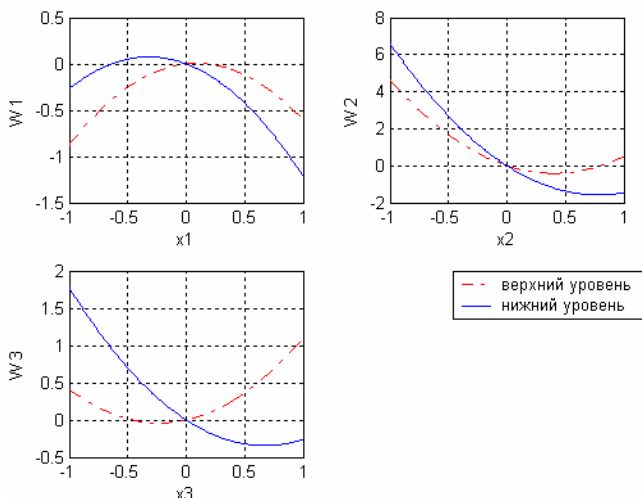


Рис. 4. Параболы квазиоднофакторных моделей ПФЭ.

Координаты экстремума передвигаются вдоль соответствующей оси  $x_i$  по линейным функциям:

$$x_1^* = -0.1141 + 0.2051x_2; \quad 0.0910 \leq x_1^* \leq 0.3192;$$

$$x_2^* = 0.5903 - 0.0589x_1 + 0.1323x_3; \quad 0.5169 \leq x_2^* \leq 0.6637;$$

$$x_3^* = 0.2216 + 0.4505x_2; \quad -1.0194 \leq x_3^* \leq 0.3472.$$

Вершины парабол всегда находятся внутри области эксперимента, так как для каждой квазиоднофакторной модели  $W_1, W_2, W_3$  выполняется условие:

$$|b_i| + \sum_{j=2}^k |b_{ij}| \leq 2|b_{ii}|. \quad (5)$$

Из рис. 4 можно сделать вывод: третий фактор обеспечивает  $W_{3max}^*$ , когда он находится на верхнем уровне, причем это значение не меняется в зависимости от уровней

других факторов, поскольку выполняется условие (6);  $W_{2max}^*$  достигается на нижнем уровне второго фактора, условие (6) выполнено; значению  $W_1^*$  могут соответствовать как нижний, так и верхний уровни переменного фактора, поскольку условие (6) нарушено:

$$|b_i| > \sum_j |b_{ij}|. \quad (6)$$

В результате в модель (2) можно подставить  $x_3^* = +1$  и  $x_2^* = -1$ , тогда

$$y = 16.1111 - 0.1694x_1 - 3.7333x_2 + 0.3042x_1x_2 - 0.7417x_1^2 + 2.5833x_2^2; \quad (7)$$

$$y = 22.4277 - 0.4736x_1 - 0.7417x_1^2.$$

Координаты экстремума определяются по формулам [1]:

$$x_i^* = (b_i + \sum_{j=2}^k b_{ij}x_j) / (-2b_{ii}). \quad (8)$$

Из (7) по (8) следует, что  $x_1^* = -0.3193$ , максимальное значение выходного параметра  $y_{max}$  равно 22.5332 (МПа).

Нормированные значения переменных факторов можно перевести в натуральные по формуле:

$$x_{nat} = x_{kod} \Delta + x_{(0)}, \quad (9)$$

где  $x_{nat}$  – натуральное значение фактора;  $x_{kod}$  – кодированное значение фактора;  $\Delta$  – интервал варьирования фактора;  $x_{(0)}$  – значение фактора на нулевом уровне.

$$x_1^* = 298.07 \text{ (м}^2/\text{кг)}; \quad x_2^* = 10 \text{ (%)}; \quad x_3^* = 1500 \text{ (м}^2/\text{кг)}.$$

2. Модель некомпозиционного факторного плана. Выполняя аналогичные преобразования, приведем модель некомпозиционного плана (3) к каноническому виду. Определитель полученной системы уравнений отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} -1.6958 & 0.6875 & 0 \\ 0.6875 & 4.7542 & -0.7750 \\ 0 & -0.7750 & 1.0292 \end{vmatrix} = -7.7655,$$

следовательно, начало координат переносится в центр поверхности. Решая систему, найдем координаты центра  $s$ :  $\tilde{x}_1 = 0.2614, \tilde{x}_2 = 0.6447, \tilde{x}_3 = 0.4855$ .

Исходное уравнение преобразуется к виду:

$$y = 16.2581 + 0.6875\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 0.7750\tilde{x}_2\tilde{x}_3 - 0.8479\tilde{x}_1^2 + 2.3771\tilde{x}_2^2.$$

Решив характеристическое уравнение:

$$f(B) = \begin{vmatrix} -0.8479 - B & 0.3438 & 0 \\ 0.3438 & 2.3771 - B & -0.3875 \\ 0 & -0.3875 & 0.5146 - B \end{vmatrix} = 0,$$

находим:  $B_{11} = -1.7707, B_{22} = 0.8811, B_{33} = 4.9772$ .

$$y - 16.2581 = -1.7707\tilde{x}_1^2 + 0.8811\tilde{x}_2^2 + 4.9772\tilde{x}_3^2.$$

Область оптимума представляет двуполостный гиперболоид (рис. 5).

Квазиоднофакторные модели в соответствии с (4) имеют вид:

$$W_1 = 0.6875x_2x_1 - 0.8479x_1^2;$$

$$W_2 = (-2.8687 + 0.6875x_1 - 0.7750x_3)x_2 + 2.3771x_2^2;$$

$$W_3 = -0.7750x_2x_3 + 0.5146x_3^2$$

и описывают семейства парабол (рис. 6):

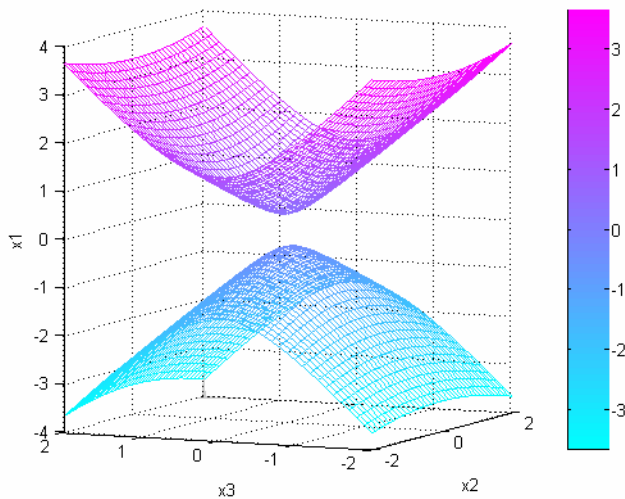


Рис. 5. Область оптимума для модели некомпозиционного плана.

$$W_1 = \pm 0.6875x_1 - 0.8479x_1^2;$$

$$W_2 = (-2.8687 \pm 1.4625)x_2 + 2.3771x_2^2;$$

$$W_3 = \pm 0.7750x_3 + 0.5146x_3^2;$$

с граничными положениями:

$$-0.6875 \leq b_1 \leq 0.6875;$$

$$-4.3312 \leq b_2 \leq -1.4062;$$

$$-0.7750 \leq b_3 \leq 0.7750.$$

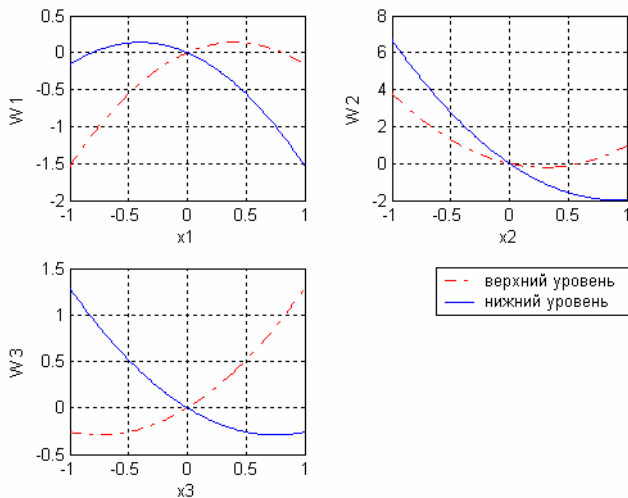


Рис. 6. Параболы квазиоднофакторных моделей НФЭ.

Координаты экстремума передвигаются вдоль соответствующей оси  $x_i$  по линейным функциям:

$$x_1^* = 0.4054x_2; \quad -0.4054 \leq x_1^* \leq 0.4054;$$

$$x_2^* = 0.6034 - 0.1446x_1 + 0.1630x_3; \quad 0.5850 \leq x_2^* \leq 0.6218;$$

$$x_3^* = 0.7530x_2; \quad -0.7530 \leq x_3^* \leq -0.6532.$$

Для каждой квазиоднофакторной модели  $W_1, W_2, W_3$  выполняется условие (5), – значит, вершины парабол всегда находятся внутри области эксперимента.

Подставив в модель (3)  $x_3^* = +1$  и  $x_3^* = -1$ , имеем:

$$y = 16.5979 - 3.6437x_2 + 0.6875x_1x_2 - 0.8479x_1^2 + 2.3771x_2^2;$$

$$y = 22.6187 - 0.6875x_1 - 0.8479x_1^2. \quad (10)$$

Из (10) по (8) следует, что  $x_1^* = -0.4054$ , а  $y_{max} = 22.7580$  (МПа).

По формуле (9) получаем натуральные значения переменных факторов:

$$x_1^* = 280.46 \text{ м}^2/\text{кг}; \quad x_2^* = 10 \text{ (\%)}; \quad x_3^* = 1500 \text{ м}^2/\text{кг}.$$

### Сравнение моделей

Для определения наилучшей модели проанализируем абсолютные значения разности экспериментальных значений и значений, вычисленных по модели для каждого плана. При использовании полного факторного плана из 27 опытов максимальное отклонение модельного значения от экспериментального составляет 0.8569. Для некомпозиционного плана, состоящего из 15 опытов, эта величина равна 0.2875. Однако, применяя модель некомпозиционного плана для расчета значений 27 экспериментов полного плана, отклонение от опытных данных составляет 1.7854. Можно сделать вывод, что модель, полученная с помощью ПФЭ, точнее, чем модели некомпозиционного плана.

Воспользуемся критерием Вильяма и Клута для сравнения двух моделей [4]. Предположим, что удовлетворительна первая модель, полученная ПФЭ, тогда:

$$\lambda = \frac{(y - y_i^M) - \frac{1}{2}(y_2^M - y_i^M)}{(y_2^M - y_i^M)} = -0.4445,$$

где  $y$  – экспериментальные значения;  $y_i^M, y_2^M$  – значения по моделям полного и некомпозиционного плана.

Так как параметр  $\lambda$  значительно отрицателен, то предположение верно, т.е. модель  $y_i^M$  лучше модели  $y_2^M$ . Обе модели адекватны и содержательны. Достоинством второй модели является ее простота. Модель некомпозиционного плана содержит меньшее число членов, что облегчает все вычисления, связанные с ее построением и дальнейшей обработкой.

1. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука, 1976.

2. Вознесенский В.А. Численные методы решения строительнотехнологических задач на ЭВМ. – Киев: Высш. школа, 1989.

3. Зегнидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. – М.: Наука, 1976.

4. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных. – Л.: Судостроение, 1980.