

Исключим дифференциальные операции по r из (13):

$$M_r u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad a_{rr} = a^2, \quad b_r = \frac{a^2}{r}, \quad c = 0, \quad \rho(r) = r,$$

$$p(r) = a^2 r, \quad p(r) = a^2 r.$$

Ядро преобразования, позволяющего исключить дифференциальные операции по r , удовлетворяет уравнению

Бесселя: $\frac{\partial}{\partial r} a^2 r \frac{\partial \bar{K}}{\partial r} + \lambda^2 r \bar{K} = 0$. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{K}}{\partial r} + \frac{\lambda^2}{a^2} \bar{K} = 0. \quad (16)$$

$$\bar{K}|_{r=r_0} = 0. \quad (17)$$

Решением уравнения (16) является функция Бесселя

$$J_0\left(\frac{\lambda_n r}{a}\right). \text{ Используя граничное условие (17) при } r = r_0,$$

придем к уравнению

$$J_0\left(\frac{\lambda_n r_0}{a}\right) = 0. \quad (18)$$

$$\text{Положим: } \mu_n = \frac{\lambda_n r_0}{a} \Rightarrow \frac{\mu_n}{r_0} = \frac{\lambda_n}{a}.$$

Корни уравнения (18) λ_n , пронумерованные в порядке их возрастания, определяют собственные числа задачи (16), (17).

$$\text{Примем: } \bar{K}_r(r) = J_0\left(\frac{\lambda_n r}{r_0}\right), \quad \bar{K}(\gamma, r) = \frac{1}{C_\gamma} r J_0\left(\frac{\lambda_n r}{r_0}\right),$$

$$C_\gamma = \frac{r_0^2}{2} \left[J_0'\left(\frac{\lambda_n r_0}{a}\right) \right]^2 = \frac{r_0^2}{2} [J_0'(\mu_n)]^2 = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_n).$$

Применив в интервале $0 \leq r \leq r_0$ интегральное преобразование с найденным ядром, приведем задачу (13)-(15) к виду (19), (20)

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\lambda_n^2 \tilde{u} \quad (19)$$

$$u|_{r=0} = \tilde{U}, \quad (20)$$

где \tilde{U} – соответствующее интегральное преобразование функции U .

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{1}{C_\gamma} \int_0^{r_0} U r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot U_0 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = \\ &= \frac{2U_0}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \left(\int_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr - \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} r^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr \right) = \frac{8U_0}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}. \end{aligned}$$

Решение задачи представимо в виде $\tilde{u} = ce^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_0^2}}$.

$$\text{Из начальных условий } c = \frac{8U_0}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}.$$

Таким образом, решение задачи (13)-(15)

$$u(r, t) = 8U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_0^2}},$$

где μ_n – положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu)$.

Отметим, что решения исходной задачи по методу Фурье и методу интегральных преобразований совпадают. Таким образом, метод интегральных преобразований является еще одним эффективным методом решения краевых задач математической физики.

1. Агошков В.И. Методы решения задач математической физики: Учеб. пособие / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев. – М.: Физматлит, 2002.

2. Кошляков Н.С. Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник / под ред. Э.Б. Глинер, М.М. Смирнова. – М.: Изд-во ФМ, 1962.

3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996.

С.А. Барабаш, А.В. Бушманов, А.А. Дрюков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ МЕЖДУ ОТЛОМКАМИ КОСТИ

In article described experimental investigation for frictional force and constant of friction from compression force between bone fragments functional dependences.

Введение

В современной травматологии для репозиции костных фрагментов и фиксации переломов широко применяются аппараты внешнего остеосинтеза [1]. В настоящее время проектирование фиксирующих устройств включает несколько этапов, среди которых – имитационное моделирование деформации фиксирующего устройства и расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) фиксирующего устройства с учетом граничных условий. На этом этапе для системы «кость – фиксирующее устройство» необходимо назначать граничные условия, приведенные к нагрузкам и перемещениям в определенных точках и выраженным в глобальной системе координат [2].

При исследовании жесткости остеосинтеза исследуют реакцию чрескостных модулей на смещающие нагрузки

в стандартных шести степенях свободы [3]. Силы, действующие в системе «кость – фиксирующее устройство», как и в любой механической системе, можно разделить на внешние, т.е. приложенные к твердому телу со стороны других тел, силы реакции, возникающие за счет упругих свойств твердого тела, и силы трения, возникающие при контакте макроскопических твердых тел и направленные по касательной к их поверхности [4].

Классификация внешних сил (смещающих нагрузок), действующих на систему «кость – фиксирующее устройство», по Соломину, выглядит следующим образом: продольная сила distraction; продольная сила компрессии; поперечная сила отведения; поперечная сила приведения; поперечная сила сгибания; поперечная сила разгибания; ротационная сила кнутри; ротационная сила кнаружи [3].

Каждой силе внешних смещающих нагрузок, действующих на систему «кость – фиксирующее устройство», противодействует соответствующая сила реакции. Последние зависят от геометрических параметров системы «кость – фиксирующее устройство», а также от упругих свойств материалов ее элементов, определяемых модулем Юнга и коэффициентом Пуассона.

При имитационном моделировании необходимо знать, какой величины сила трения действует вдоль поверхности контакта двух отломков кости под влиянием продольной силы компрессии, так как она противодействует ротаци-

онной и другим силам, смещающим костные отломки относительно друг друга вдоль плоскости контакта.

Целью исследования является определение коэффициента трения действующего вдоль поверхности контакта двух отломков кости, состоящей из трабекулярной и кортикальной костной ткани, при действии продольной силы компрессии между отломками.

Постановка задачи

В структуре кости выделяют компактную кость, структура которой определяется пластинчатым строением, и спонгиозную (губчатую) кость, обладающую высокой (и неоднородной) пористостью (рис. 5).

Спонгиозная кость состоит из трабекул, образующих сложную пространственную структуру – трабекулярную костную ткань. Пространство между трабекулами заполнено костным мозгом и кровеносными сосудами. Пространственная структура, которую образуют трабекулы, неоднородна и анизотропна. В зависимости от особенностей структуры различают три разновидности спонгиозной кости: трубчатую, пластинчатую и состоящую из перекладин [5].

Поверхностные участки кости формируются из компактной костной ткани, внутренние – из спонгиозной.

Из клинической практики и из экспериментальных исследований систем «кость – фиксирующее устройство» известно, что при остеосинтезе нестабильных переломов тазового кольца, при разрыве лобкового симфиза в сочетании с переломом крестца, в районе крестца при контакте отломков трабекулярной поверхностью действует сила зацепления между отломками, которая препятствует смещению отломков вдоль поверхности контакта, а в месте лобкового симфиза возникает сила трения между кортикальными поверхностями отломков, меньшая, чем сила трения между трабекулярными поверхностями. Чему равны эти силы численно, неизвестно. В устройствах существующих типов отсутствует система, которая бы использовала свойства трабекулярного слоя костной ткани, позволяющего со значительно меньшей компрессирующей силой создавать в области перелома необходимую жесткость системы «кость – фиксирующее устройство» [6].

Требуется найти коэффициент трения, возникающего вдоль поверхности контакта двух отломков кости, состоящих из трабекулярной и кортикальной костной ткани при действии между ними силы компрессии.

Теоретическое исследование

Представим место перелома в виде контакта двух поверхностей М (рис. 1).

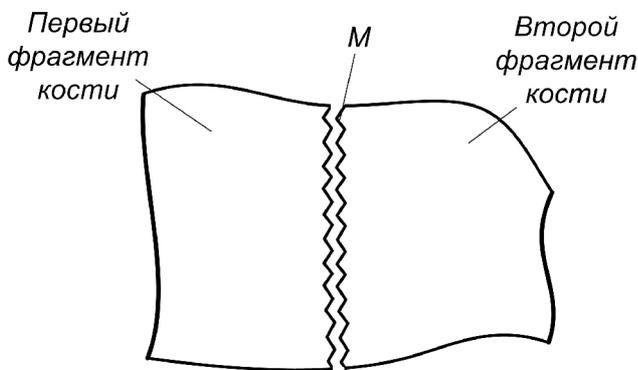


Рис. 1. Контакт двух отломков.

Предполагаем, что площадь контакта состоит в среднем из треугольных пирамид (рис. 2) [7].

Допустим, что средняя высота пирамиды h по площади контакта S равна 0,0005 м (данные экспериментальных измерений) [7]. Прочность соединения двух площадей

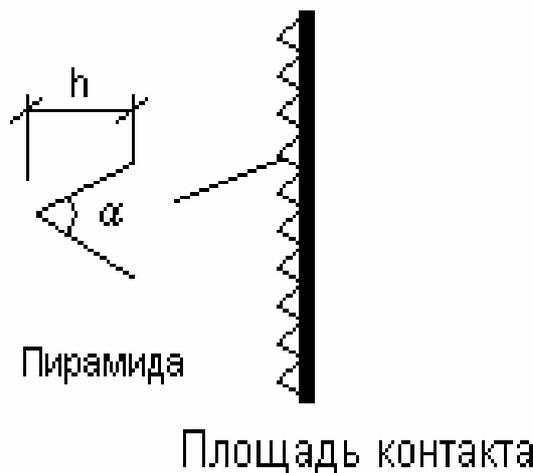


Рис. 2. Площадь контакта отломков таза.

в вертикальном направлении будет ограничиваться только прочностью пирамид на срез. Количество пирамид на площади S равно:

$$n = \frac{S}{(2h \cdot \tan(\alpha))^2}, \tag{1}$$

где α – угол при вершине пирамиды (рис. 2); по данным [7] принимаем его равным 18° .

Рассмотрим контакт двух пирамид (рис. 3).

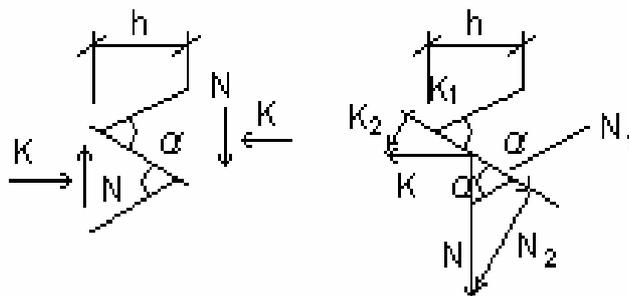


Рис. 3. Распределение нагрузки и силы компрессии в месте контакта двух пирамид.

На рис. 3: N – сила сжатия двух контактирующих поверхностей пирамид; N_1 и N_2 – горизонтальная и вертикальная составляющие; K – сила компрессии; K_1 и K_2 – горизонтальная и вертикальная составляющие.

Нас интересует условие: $N_1 = K_1$ составляющих, так как при соблюдении этого условия не будет скольжения поверхностей пирамид относительно друг друга. Отсюда следует, что при определенной величине компрессии поверхности S не будут смещаться относительно друг друга.

$$N_1 = \frac{F \cdot \cos(90 - \alpha/2)}{n}, \tag{2}$$

$$K_1 = \frac{F \cdot \cos(\alpha/2)}{n}, \tag{3}$$

По расчетам для отломков с площадью контакта $20,285 \text{ см}^2$ и силой компрессии 2 кГс смещения пирамид относительно друг друга не будет до нагрузки N , равной 13 кГс, а при силе компрессии 8 кГс смещения не будет до нагрузки N , равной 54 кГс. Для отломков с площадью контакта $7,815 \text{ см}^2$ и силой компрессии 2 кГс смещения не будет до нагрузки N , равной 12 кГс; при силе компрессии 4 кГс смещения не будет до нагрузки N , равной 27 кГс.

Необходимо экспериментальное исследование зависимости величины силы зацепления, препятствующей смещению отломков, от силы компрессии.

Экспериментальное исследование

Методика проведения эксперимента.

Оборудование. В ходе эксперимента использовались лабораторный стенд для биомеханических исследований, разработанный в рамках НИР (ЕЗН № 1.1.07 «Исследование методов математического моделирования фиксирующих устройств в медицине на примере травматологии»), пружинный силомер, набор тарированных грузов по 0,25 кг, 0,5 кг, 1 кг и 2 кг, уровень. В качестве экспериментального образца использовалась вываренная тазовая кость.

Первая серия экспериментов.

В первой серии экспериментов использовалась подвздошная кость правого полукольца таза, рассеченная на два отломка, как показано на рис. 4.



Рис. 4. Обломки подвздошной кости.

Поверхность контакта состояла из трабекулярной и кортикальной костной ткани (рис. 5). Площадь контакта между отломками равна 20,285 см².

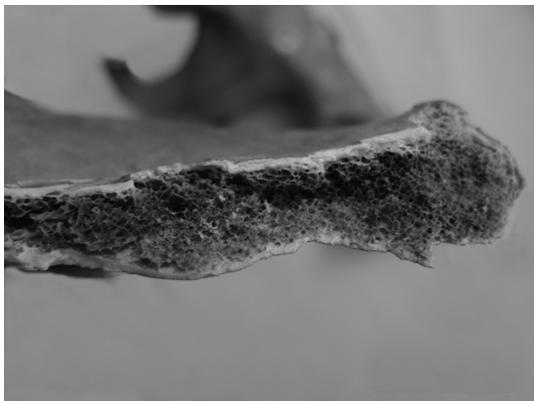


Рис. 5. Поверхность контакта между обломками.

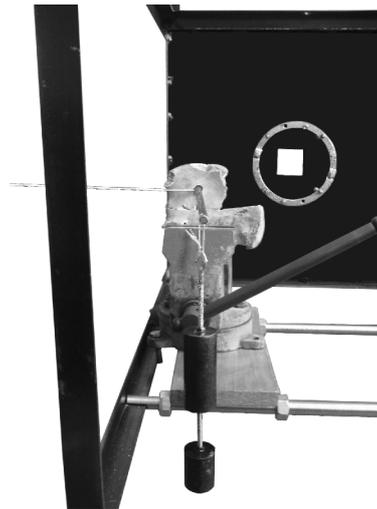


Рис. 6. Эксперимент первой серии.

Далее один из отломков жестко закреплялся в тиски, установленные на стенде, а сверху на него помещали второй отломок (рис. 6). В отверстие в отломке, установленном сверху, вставлялся стержень, с обеих сторон к нему подвешивались грузы определенной величины. Так моделировалась компрессия между отломками. Величина силы компрессии менялась от 1 кгс до 12 кгс. Сила трения покоя между отломками измерялась с помощью пружинного силомера. В отверстие в верхнем отломке продевался тросик и прикреплялся к силомеру. После создания силы компрессии за счет нагружения грузами костный отломок с помощью силомера постепенно тянули параллельно поверхности контакта между отломками до того момента, пока верхний отломок не сдвигался с места. Весь процесс фиксировался двумя видеокамерами, и при кадровом просмотре можно было определить, при каком значении силы, действующей вдоль поверхности контакта отломков, началось их смещение (при заданной силе компрессии).

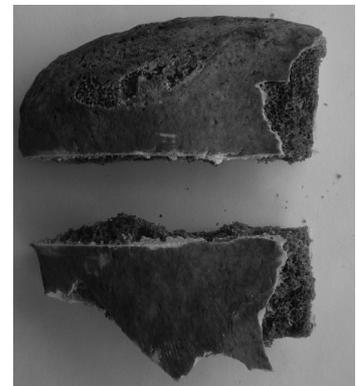


Рис. 7. Эксперимент второй серии.

Вторая серия экспериментов.

Во второй серии экспериментов применялась та же методика, что и в первой. В качестве образцов применялись отломки, показанные на рис. 7. Площадь контакта между отломками равнялась 7,815 см². Величина силы компрессии менялась от 1 кгс до 6 кгс.

Результаты первой и второй серий экспериментов приведены в таблице, где F_k – сила компрессии; F_t – сила трения; K_t – коэффициент трения.

Первая серия экспериментов				Вторая серия экспериментов			
№	F_k	F_t	K_t	№	F_k	F_t	K_t
1	1	3	3	1	1	2,5	2,5
2	2	3,75	1,875	2	2	4	2
3	3	4,75	1,583	3	3	5	1,667
4	4	5,5	1,375	4	4	5,25	1,313
5	5	6,25	1,25	5	5	6,25	1,25
6	6	6,75	1,25	-	-	-	-
7	7	8,25	1,179	-	-	-	-
8	8	9	1,125	-	-	-	-
9	10	12,75	1,275	-	-	-	-
10	12	16,75	1,396	-	-	-	-
Средне- квадратич. отклон.	3,521	4,264	0,569	Среднеквад- ратич. от- клон.	1,581	1,421	0,518

Обработка экспериментальных данных

Обработка результатов экспериментов осуществлялась методом полиномиального регрессионного анализа. С помощью этого метода производится аппроксимация данных, результат которой – аналитическая зависимость, полученная по заданным узловым точкам. Для обработки результатов применялся ППП Matlab 6.5, позволяющий автоматически находить полиномиальные зависимости с помощью метода регрессионного анализа [8].

При обработке первой серии экспериментов получены результаты, представленные на рис. 8. На рис. 8 а представлена зависимость силы трения между отломками от силы компрессии между отломками, а на рис. 8 б – зависимость коэффициента трения от силы компрессии.

между ними, полученные по результатам второй серии экспериментов, представлены выражениями (5)

$$\begin{aligned} F_t(F_k) &= -0,12 \cdot F_k^2 + 1,6 \cdot F_k + 1,1, \\ K_t(F_k) &= 0,061 \cdot F_k^2 - 0,68 \cdot F_k + 3,1. \end{aligned} \quad (5)$$

Выводы

В ходе исследования найдены основные соотношения, определяющие зависимость силы трения между отломками кости от силы компрессии и зависимость коэффициента трения между отломками кости от силы компрессии. Сила трения и коэффициент трения меняются нелинейно в зависимости от силы компрессии

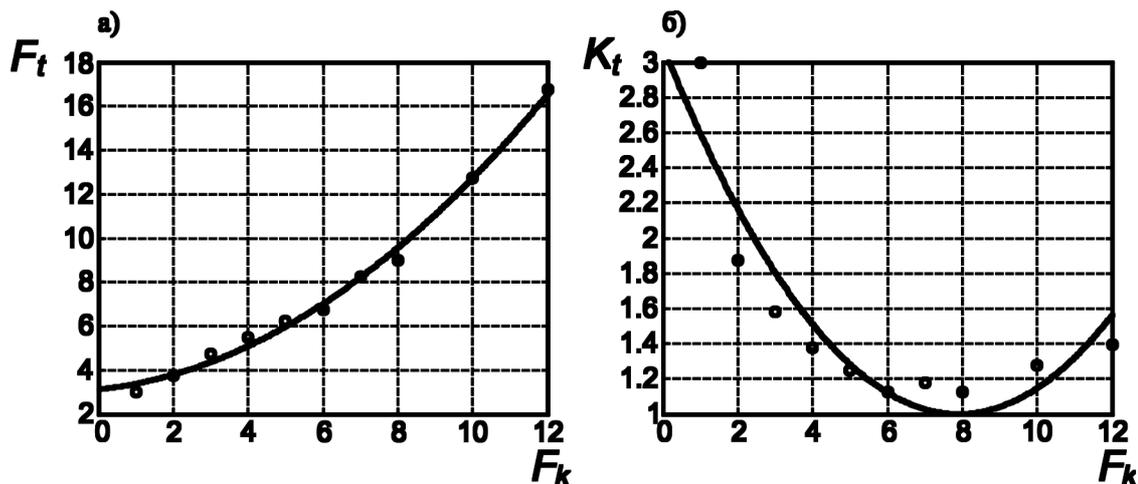


Рис. 8. Результаты первой серии опытов.

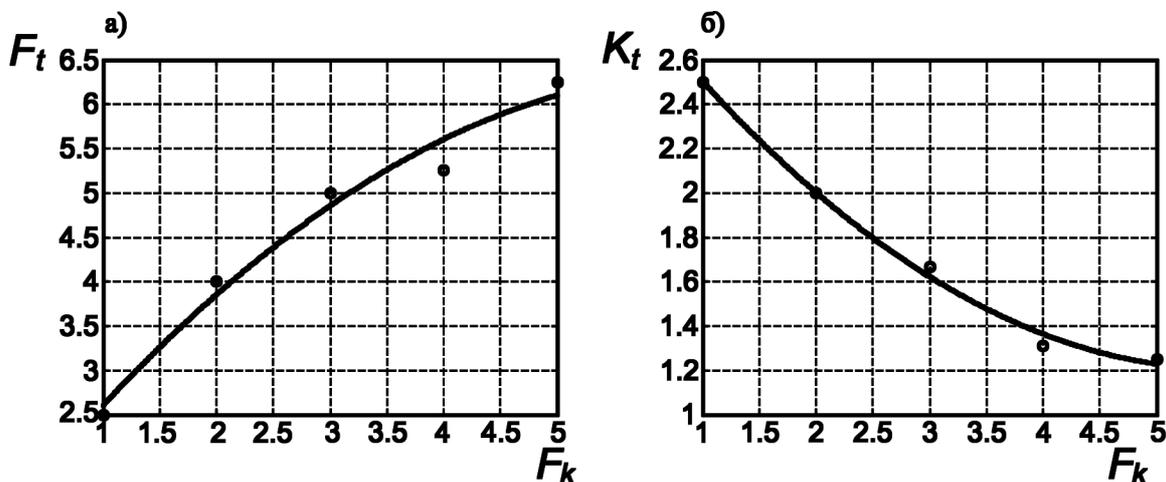


Рис. 9. Результаты второй серии опытов.

Аналитические зависимости силы трения между отломками и коэффициента трения от силы компрессии между ними, полученные по результатам первой серии экспериментов, представлены выражениями (4)

$$\begin{aligned} F_t(F_k) &= 0,078 \cdot F_k^2 - 0,18 \cdot F_k + 3,1, \\ K_t(F_k) &= 0,033 \cdot F_k^2 - 0,53 \cdot F_k + 3,1. \end{aligned} \quad (4)$$

При обработке результатов второй серии экспериментов получены данные, представленные на рис. 9. На рис. 9 а – зависимость силы трения между отломками от силы компрессии между ними, а на рис. 9 б – зависимость коэффициента трения от силы компрессии.

Аналитические зависимости силы трения между отломками и коэффициента трения от силы компрессии

между отломками. Поведение этих зависимостей для первой и второй серии экспериментов имеет подобный характер при силах компрессии от 1 кГс до 5 кГс. Структура трабекулярной костной ткани, форма и площадь поверхности контакта у образцов первой и второй серии экспериментов были разными, очевидно, это повлияло на результаты экспериментов. Результаты, полученные в данной работе и расчетные по методике, изложенной в [7], существенно различаются. Очевидно, вываренная и высушенная костная ткань имеет иные коэффициенты трения, чем живая, так как в живой костной ткани в межклеточном пространстве присутствуют разные жидкие и аморфные вещества, которые будут влиять на фрикционные свойства ткани.

Для уточнения результатов необходимо проведение дальнейших испытаний с учетом формы поверхности контакта между костными отломками, структуры костной ткани и ее состава.

1. Стецула В.И., Девятая А.А. Чрескостный остеосинтез в травматологии. Киев: Здоров'я, 1987.
2. Барабаш С.А., Бушманов А.В. Имитационное моделирование деформации фиксирующих устройств как стержневых систем // Информатика и системы управления. – 2009. – № 1(19). – С. 23-27.

А.В. Рыженко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

In work the mathematical model of experiment is presented, optimum values of entrance parameters at which value of model reaches an optimum are formulated.

Введение

Математическое моделирование составляет основу теоретических исследований и обладает рядом несомненных преимуществ, так как, не используя сильных допущений, позволяет получить качественную и количественную информацию о любой стороне моделируемого явления при различных условиях проведения вычислительного эксперимента. На современном уровне развития науки и техники многие исследования в физике, биологии, химии требуют постановки сложных экспериментов. Проблема извлечения наибольшего количества сведений об изучаемых процессах при ограниченных затратах весьма актуальна. В связи с этим необходимы как широкое применение методов, которые давали бы не только способ обработки экспериментальных данных, но и позволяли бы оптимальным образом организовывать эксперимент, так и их реализация на ЭВМ для повешения скорости расчетов.

Постановка задачи

Рассмотрим применение планирования второго порядка для отыскания максимального значения выходного параметра – предела прочности бетонных образцов. Пусть экспериментом выбраны следующие переменные факторы: 1) удельная поверхность поргланцемента – X_1 , м²/кг; 2) содержание минеральной добавки – X_2 , % от массы цемента; 3) содержание заполнителя – X_3 , кг/м³, которые варьируют на трех уровнях: основном (0), верхнем (+1) и нижнем (-1). Натуральные значения каждого фактора представлены в табл. 1.

Таблица 1

Натуральные значения переменных факторов

Переменные факторы	Нижний уровень	Основной уровень	Верхний уровень	Интервал варьирования
X_1	230	330	430	100
X_2	10	20	30	10
X_3	1000	1250	1500	250

Сформулируем математическую модель эксперимента и определим оптимальные значения факторов, при которых выходной параметр – предел прочности при сжатии бетонного образца (МПа) – принимает максимальное значение. При моделировании эксперимента использова-

3. Соломин Л.Н. Основы чрескостного остеосинтеза аппаратом Г.А. Илизарова: Монография. – СПб.: ООО «МОРСАВ», 2005.
4. Белов Д.В. Механика: Учеб. пособие. – М.: Физический ф-т МГУ; НЭВЦ ФИПГ, 1998.
5. Образцов И.Ф., Хайме М.А. Оптимальные биомеханические системы. – М.: Медицина, 1989.
6. Бушманов А.В. Математическое и компьютерное моделирование фиксирующих устройств в травматологии. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007.
7. Воронин Н.И., Бушманов А.В., Борозда И.В. Аппаратный остеосинтез костей таза. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2000.
8. Дьяконов В. MATLAB 6: учебный курс. – СПб.: Питер, 2001.

на полиномиальная экспериментально-статистическая (ЭС) модель, трехфакторный план [2].

Построение модели

Для получения наиболее эффективной модели принято решение о постановке двух планов – полного и некомпозиционного [1].

1. Полный факторный план. Условия и постановка исходной задачи требуют построения ЭС-модели второго порядка. При планировании по схеме полного факторного эксперимента (ПФЭ) реализуются всевозможные сочетания уровней факторных переменных. Необходимое количество опытов N для такого эксперимента определяется по формуле $N = p^k$, где p – число уровней факторов; k – число факторов. Тогда число опытов равно 27. Матрица ПФЭ представлена в табл. 2, в которой Y' , Y'' – результаты параллельных опытов.

Обработка результатов осуществляется по следующей схеме [1]:

- 1) оценка дисперсий среднего арифметического в каждой строке матрицы;
- 2) проверка однородности дисперсий с помощью критерия Кохрена;
- 3) расчет оценки дисперсии воспроизводимости, если дисперсии однородны;
- 4) определение коэффициентов регрессии;
- 5) проверка адекватности модели;
- 6) проверка значимости коэффициентов регрессии.

Найденные значения дисперсий среднего арифметического каждого опыта приведены в табл. 3.

Критерий Кохрена $G = 0.1259$. Табличное значение для 27 опытов и одной степени свободы равно 0.3002; гипотеза об однородности дисперсий не отвергается [3]. Дисперсия воспроизводимости: $s^2\{y\} = 0.1470$.

Оценки коэффициентов регрессии определяются методом наименьших квадратов. Составив матрицу базисных функций от независимых переменных и матрицу-столбец откликов, находим матрицу моментов и матрицу-столбец коэффициентов для модели второго порядка:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & 18 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 12 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & 12 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

Таким образом, подставив найденные матрицы в (1), найдем коэффициенты полинома:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (1)$$