Т.В. Труфанова, Е.М. Веселова

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

***In article the practical example of application of a method of integrated transformations for the decision of the equation of heat conductivity for the infinite round cylinder is resulted.***

Интегральным преобразованием с ядром $K(x_1,x_2,...,x_m;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m)$ называют преобразование вида [1]:

$$\iint_{(S)}...\int f(x_1,x_2,...,x_n)K(x_1,x_2,...,x_m;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m)\times \times dx_1dx_2...dx_m \quad (m\le n), \tag{1}$$

которым функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ $n$ переменных $x_1,x_2,...,x_n$ сопоставляется функция $\bar f(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m,x_{m+1},x_{m+2},...,x_n)$ $m$ переменных $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ и $n$-$m$ переменных $x_{m+1},x_{m+2},...,x_n$, представленная интегралом (1).

Всякое интегральное преобразование определяется ядром $K(x_1,x_2,...,x_m;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m)$, областью $S$ интегрирования и множеством $\Phi$ функций $f(x_1,x_2,...,x_n)$, к которым оно применяется. Чтобы задать конкретное интегральное преобразование, надо указать все эти данные.

Преобразование, которым функция $\bar f(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m,x_{m+1},x_{m+2},...,x_n)$ снова преобразуется в функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$, называется обратным интегральному преобразованию (1), или просто обратным преобразованием. При этом само преобразование (1) называют прямым. Отметим, что обратное преобразование не всегда является интегральным.

Пределы интегрирования при преобразовании следует выбрать так, чтобы они совпадали с пределами $(a, b)$ изменения переменной преобразования $x_i$, так как иначе либо не будут учтены значения преобразуемых функций вне интервала интегрирования, либо интегрирование распространится бы на область, в которой преобразуемые функции могут быть не определены [1]. Таким образом, если переменная преобразования изменяется в конечных пределах, то и интегральное преобразование будет иметь конечные пределы, а в противном случае интегральное преобразование должно быть осуществлено в бесконечных пределах. Соответственно различают конечные и бесконечные интегральные преобразования.

Рассмотрим задачу, поставленную в некоторой области для дифференциального уравнения второго порядка [2]:

$$\mathrm{M}u = f, \tag{2}$$

$$\mathrm{M}u = \mathrm{M}_i u + \mathrm{M}'u, \tag{3}$$

где $$\mathrm{M}_i u = a_{ii}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, \tag{4}$$

а $\mathrm{M}'u$ – выражение, не содержащее операций дифференцирования по $x_i$.

Задача для нахождения ядра интегрального преобразования сводится к виду (5)-(7):

$$\frac{\partial}{\partial x_i}p\frac{\partial \bar K}{\partial x_i} - q\bar K + \lambda^2\rho\bar K = 0 \tag{5}$$

$$\left[\alpha_a\frac{\partial \bar K_\gamma}{\partial x_i} - \beta_a\bar K_\gamma\right]_{x_i=a} = 0 \tag{6}$$

$$\left[\alpha_b\frac{\partial \bar K_\gamma}{\partial x_i} + \beta_b\bar K_\gamma\right]_{x_i=b} = 0, \tag{7}$$

где $\rho(x_i) = e^{-\int\frac{1}{a_{ii}}\left(\frac{da_{ii}}{dx_i}-b_i\right)dx_i}$, $p(x_i) = a_{ii}\rho(x_i)$, $q(x_i) = -c\rho(x_i)$.

Ядро интегрального преобразования для задачи (5)-(7) представлено в виде (8):

$$K(x_i,\gamma) = \frac{1}{C_\gamma}\rho(x_i)\bar K(x_i,\gamma), \tag{8}$$

где $C_\gamma$ – функцию от аргумента $\gamma$ – будем называть нормирующим делителем, а $\bar K(x_i,\gamma)$ будет решением задачи (5)-(7).

Таким образом, при возможности выполнения интегрального преобразования по переменной $x_i$, изменяющейся в конечном интервале $(a, b)$, уравнение $\mathrm{M}u = f$ преобразуется к виду:

$$\mathrm{M}'\bar u - \lambda_\gamma\bar u = \bar f + \bar N_a - \bar N_b, \tag{9}$$

где $\bar u$ и $\bar f$ – интегральные преобразования функций $u$ и $f$, а $\bar N_a$ и $\bar N_b$ – функции, вид которых определяется условиями, заданными по координате в граничных точках интервала $(a, b)$.

$$\left.\begin{aligned}\bar N_a &= \begin{cases}\dfrac{1}{C_\gamma\alpha_a}p(a)\bar K_\gamma(a)\varphi_a & при \quad \alpha_a\ne 0,\\ \dfrac{1}{C_\gamma}p(a)\dfrac{\partial \bar K_\gamma}{\partial x_i}\Big|_{x_i=a}\varphi_a & при \quad \alpha_a = 0, \quad \beta_a = -1;\end{cases}\\ \bar N_b &= \begin{cases}\dfrac{1}{C_\gamma\alpha_b}p(b)\bar K_\gamma(b)\varphi_b & при \quad \alpha_b\ne 0,\\ \dfrac{1}{C_\gamma}p(b)\dfrac{\partial \bar K_\gamma}{\partial x_i}\Big|_{x_i=b}\varphi_b & при \quad \alpha_b = 0, \quad \beta_b = 1;\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

При условии периодичности по координате $x_i$: $\bar N_a - \bar N_b = 0$.

Таким образом, решение задачи

$$\mathrm{M}u = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} + \sum_{\alpha=0}^{3} b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{11}$$

с учетом найденного ядра интегрального преобразования, имеет вид (12)

$$u(x_i,y) = \sum_{n=1}^{\infty}U(y,\gamma)K(x_i,\gamma), \tag{12}$$

где $U(y,\gamma) = \int_a^b u(x_i,y)K(x_i,\gamma)\rho(x_i)dx_i$.

Применим вышеизложенные теоретические аспекты к конкретной задаче.

Нужно определить температуру бесконечного круглого цилиндра радиусом $r_0$, если его начальная температура $u(r,0) = U_0\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$, а на поверхности поддерживается нулевая температура.

Представим поставленную задачу в виде математической модели:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad 0\le r\le r_0. \tag{13}$$

Граничное условие: $$u\big|_{r=r_0} = 0. \tag{14}$$

Начальное условие: $$u\big|_{t=0} = U_0\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right) = U. \tag{15}$$

Исключим дифференциальные операции по $r$ из (13):

$$\mathrm{M}_r u = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\right),\ a_{rr}=a^2,\ b_r=\frac{a^2}{r},\ c=0,\ \rho(r)=r,$$

$p(r)=a^2 r$, $p(r)=a^2 r$.

Ядро преобразования, позволяющего исключить дифференциальные операции по $r$, удовлетворяет уравнению Бесселя: $\frac{\partial}{\partial r}a^2 r\frac{\partial \overline{K}}{\partial r}+\lambda^2 r\overline{K}=0$. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\frac{\partial^2 \overline{K}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \overline{K}}{\partial r}+\frac{\lambda^2}{a^2}\overline{K}=0. \qquad (16)$$

$$\overline{K}\Big|_{r=r_0}=0. \qquad (17)$$

Решением уравнения (16) является функция Бесселя $J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right)$. Используя граничное условие (17) при $r=r_0$, придем к уравнению

$$J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r_0\right)=0. \qquad (18)$$

Положим: $\mu_n=\frac{\lambda_n}{a}r_0 \Rightarrow \frac{\mu_n}{r_0}=\frac{\lambda_n}{a}$.

Корни уравнения (18) $\lambda_n$, пронумерованные в порядке их возрастания, определяют собственные числа задачи (16), (17).

Примем: $\overline{K}_\gamma(r)=J_0\left(\frac{\lambda_n}{r_0}r\right)$, $\overline{K}(\gamma,r)=\frac{1}{C_\gamma}rJ_0\left(\frac{\lambda_n}{r_0}r\right)$,

$$C_\gamma=\frac{r_0^2}{2}\left[J_0'\left(\frac{\lambda_n}{a}r_0\right)\right]^2=\frac{r_0^2}{2}\left[J_0'(\mu_n)\right]^2=\frac{r_0^2}{2}J_1^2(\mu_n).$$

Применив в интервале $0\le r\le r_0$ интегральное преобразование с найденным ядром, приведем задачу (13)-(15) к виду (19), (20)

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}=-\lambda_n^2\widetilde{u} \qquad (19)$$

$$u\big|_{t=0}=\widetilde{U}, \qquad (20)$$

где $\widetilde{U}$ – соответствующее интегральное преобразование функции $U$.

$$\widetilde{U}=\frac{1}{C_\gamma}\int_0^{r_0}UrJ_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr=\frac{2}{r_0^2J_1^2(\mu_n)}\cdot U_0\int_0^{r_0}\left(1-\frac{r}{r_0^2}\right)rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr=$$

$$=\frac{2U_0}{r_0^2J_1^2(\mu_n)}\cdot\left(\int_0^{r_0}rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr-\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0}r^3J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr\right)=\frac{8U_0}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}.$$

Решение задачи представимо в виде $\widetilde{u}=ce^{-\frac{\mu_n^2a^2}{r_0^2}t}$.

Из начальных условий $c=\frac{8U_0}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}$.

Таким образом, решение задачи (13)-(15)

$$u(r,t)=8U_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}e^{-\frac{\mu_n^2a^2}{r_0^2}t},$$

где $\mu_n$ – положительные корни трансцедентного уравнения $J_0(\mu)$.

Отметим, что решения исходной задачи по методу Фурье и методу интегральных преобразований совпадают. Таким образом, метод интегральных преобразований является еще одним эффективным методом решения краевых задач математической физики.


1. Агошков В.И. Методы решения задач математической физики: Учеб. пособие / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев. – М.: Физматлит, 2002.
2. Кошляков Н.С. Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник / под ред. Э.Б. Глинер, М.М. Смирнова. – М.: Изд-во ФМ, 1962.
3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996.


**С.А. Барабаш, А.В. Бушманов, А.А. Дрюков**

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ МЕЖДУ ОТЛОМКАМИ КОСТИ

***In article described experimental investigation for frictional force and constant of friction from compression force between bone fragments functional dependences.***

### Введение

В современной травматологии для репозиции костных фрагментов и фиксации переломов широко применяются аппараты внешнего остеосинтеза [1]. В настоящее время проектирование фиксирующих устройств включает несколько этапов, среди которых – имитационное моделирование деформации фиксирующего устройства и расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) фиксирующего устройства с учетом граничных условий. На этом этапе для системы «кость – фиксирующее устройство» необходимо назначать граничные условия, приведенные к нагрузкам и перемещениям в определенных точках и выраженным в глобальной системе координат [2].

При исследовании жесткости остеосинтеза исследуют реакцию чрескостных модулей на смещающие нагрузки в стандартных шести степенях свободы [3]. Силы, действующие в системе «кость – фиксирующее устройство», как и в любой механической системе, можно разделить на внешние, т.е. приложенные к твердому телу со стороны других тел, силы реакции, возникающие за счет упругих свойств твердого тела, и силы трения, возникающие при контакте макроскопических твердых тел и направленные по касательной к их поверхности [4].

Классификация внешних сил (смещающих нагрузок), действующих на систему «кость – фиксирующее устройство», по Соломину, выглядит следующим образом: продольная сила дистракции; продольная сила компрессии; поперечная сил отведения; поперечная сила приведения; поперечная сила сгибания; поперечная сила разгибания; ротационная сила кнутри; ротационная сила кнаружи [3].

Каждой силе внешних смещающих нагрузок, действующих на систему «кость – фиксирующее устройство», противодействует соответствующая сила реакции. Последние зависят от геометрических параметров системы «кость – фиксирующее устройство», а также от упругих свойств материалов ее элементов, определяемых модулем Юнга и коэффициентом Пуассона.

При имитационном моделировании необходимо знать, какой величины сила трения действует вдоль поверхности контакта двух отломков кости под влиянием продольной силы компрессии, так как она противодействует ротаци-