Т.В. Труфанова, Т.К. Барабаш

РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

In work is considered the equation $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ where $P(x,y)$ and $Q(x,y)$ – holomorphic functions in a vicinity of point $x=0,\ y=0$. Us existence and construction of decisions interests $y\to 0$ at $x\to 0$. Special case of the equation is equation Brio and Buke.

В работе рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – голоморфные функции в окрестности точки $x=0,\ y=0$, т.е. представимы рядами

$$Q(x,y)=p_{11}x+p_{21}y+\sum_{k+l\ge 2}b_{kl}x^k y^l,$$
$$P(x,y)=p_{12}x+p_{22}y+\sum_{k+l\ge 2}a_{kl}x^k y^l,$$

и эти ряды сходятся в области $|x|<r,\ |y|<r$. Здесь p_{kl}, a_{kl} и b_{kl} – вещественные постоянные, r – расстояние до ближайшего из корней полинома $Q(x,y)$. Нас интересуют существование и построение решений

$$y\to 0 \text{ при } x\to 0. \tag{2}$$

Это решение можно изучать в параметрическом виде, записывая уравнение (1) в виде

$$\dot x=\frac{dx}{dt}=Q(x,y),\quad \dot y=\frac{dy}{dt}=P(x,y) \tag{3}$$

или в векторном виде

$$(\dot x,\dot y)=(x,y)P+(Q_2,P_2),\quad P=\begin{Vmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{Vmatrix}.$$

Здесь решения (1) получим в параметрическом виде: $x=x(t),\ y=y(t)$.

Решением $x\to 0, y\to 0$ при $t\to t_0$ (конечное) будет только $x\equiv 0$, $y\equiv 0$, так как по теореме Пикара другого непрерывного решения с такими начальными условиями быть не может [1]. Нас же интересует решение, обладающее свойством (2). Для уравнений (3) таким решением будет:

$x\to 0, y\to 0$ при $t\to\infty$.

Надо различать четыре типа уравнений, содержащихся в общем виде уравнения (1), в связи с четырьмя различными формами канонической матрицы, соответствующими матрице

$$P=\begin{Vmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{Vmatrix}=S^{-1}JS$$

$$J=\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{Vmatrix},\ \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ – вещественные.}$$

В этом случае вопрос сводится к построению решения $y=y(x)\to 0$ при $x\to 0$ уравнения Брио и Буке:

$$x\frac{dy}{dx}-by=a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\dots$$

$$J=\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{Vmatrix},\ \lambda \text{ – вещественное.}$$

Здесь, если $\lambda\ne 0$, задача сводится к рассмотрению системы уравнений

$$\dot u=v+F_1(u,v),\quad \dot v=F_2(u,v).$$

$$J=\begin{Vmatrix}p+iq & 0\\ 0 & p-iq\end{Vmatrix},\ p,\ q \text{ – вещественные.}$$

Если $p\ne 0$, то интегральные кривые представляют собой спирали, закручивающиеся вокруг начала координат.

$$J=\begin{Vmatrix}iq & 0\\ 0 & -iq\end{Vmatrix}.$$

Здесь, в окрестности начала координат, согласно теореме Ляпунова и Пуанкаре все интегральные кривые будут либо замкнутыми (центр), либо спиралями (фокус) [1].

Частным случаем (1) является уравнение Брио и Буке. Рассмотрим это уравнение, оно имеет вид:

$$x\frac{dy}{dx}-by=a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\dots \tag{4}$$

Будем искать решение

$$y\to 0 \text{ при } x\to 0. \tag{5}$$

Другими словами, нас интересует голоморфное решение, т.е. представляемое в виде сходящегося ряда

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}c_k x^k. \tag{6}$$

В зависимости от значения коэффициента b уравнения (6) возможно пять случаев.

Если $b\ne n$ не целое положительное, то существует единственное голоморфное решение уравнения (4) вида (6), обладающее свойством (4).

В случае $b=1$, если коэффициент $a_{10}\ne 0$ уравнения (4), то решения вида (6) не существует.

Если же $a_{10}=0$, то существует решение $y=xu(x)$, где функция $u(x)$ является решением дифференциального уравнения $\frac{du(x)}{dx}=a_{20}+a_{11}u(x)+a_{02}u^2(x)+\dots$

Если $b=n>1$ – целое, то, вводя новую неизвестную функцию u равенством $y=\frac{a_{10}}{1-n}x+ux$ и проделав это несколько раз, придем к уравнению вида:

$$xv'-v=\gamma_{10}x+\gamma_{20}x^2+\gamma_{11}xv+\gamma_{02}v^2+\dots \tag{7}$$

Тогда, если в уравнении (7) $\gamma_{10}\ne 0$, то уравнение (4) не имеет решения, обладающего свойством (5) в виде (6). Если же $\gamma_{10}=0$, то такое решение имеем в виде

$$y=\alpha_1x+\alpha_2x^2+..+\alpha_{n-1}x^{n-1}+x^n p_0+\alpha_{n+1}x^{n+1}+\dots,$$

где p_0 – произвольное, а $\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},\dots$ известным образом зависят от p_0.

Если $b<0$, тогда имеем единственное голоморфное решение вида (6), обладающее свойством (4).

В случае $b=0$, если $a_{02m+1}>0$ (и $a_{0k}=0$ при $k\le 2m$), то все решения уравнения (4), начинающиеся вблизи начала координат, обладают свойством (5) и одно из них будет голоморфным, т.е. вида

$$y=a_{10}x+\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k x^k.$$

Во всех остальных случаях не все решения уравнения (4), начинающиеся вблизи начала координат, обладают свойством (5).

Рассмотрим пример, для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2y+x^2+2xy+y^2}{x+3y}. \qquad (8)$$

Будем искать решение, обладающее свойством: $y\to 0$ при $x\to 0$.

В векторном виде уравнение (8) имеет вид

$$(\dot{x},\dot{y})=(x,y)P+\big(0,Q(x,y)\big), \qquad (9)$$

матрица P определяется формулой

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}S,$$

где S и S^{-1} имеют вид $S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Сделаем замену переменных

$$(x,y)=(u,v)S. \qquad (10)$$

Отсюда x и y определяются формулой:

$$\begin{cases}x=u-v,\\ y=v\end{cases} \qquad (11)$$

Подставим замену (10) в параметрический вид нашего уравнения (9) и запишем последнее в виде

$$\frac{dv}{du}=\frac{-2v+u^2}{u+u^2}. \qquad (12)$$

В (12) сделаем замену переменных

$$v=zu, \qquad (13)$$

тогда, учитывая, что u и z малые, проведем простейшие преобразования и сокращения. В результате получим:

$$\frac{dz}{du}u=-3z+u-u^2+2uz+u^2z. \qquad (14)$$

Последнее уравнение имеет вид уравнения Брио и Буке с отрицательным коэффициентом перед z, поэтому будем искать решение в виде:

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}C_k u^k. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, найдем константы C_k. Имеем:

$$4C_1=1\Rightarrow C_1=\frac{1}{4},$$

$$5C_2=-1+2C_1\Rightarrow C_2=-\frac{1}{10},$$

$$6C_3=2C_2+C_1\Rightarrow C_3=\frac{1}{120}.$$

и т.д.

Следовательно, уравнение (14) имеет решение

$$z=\frac{1}{4}u-\frac{1}{10}u^2+\frac{1}{120}u^3.$$

Возвращаясь к замене (13), найдем решение уравнения (12) в виде

$$v=uz=\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{10}u^3+\frac{1}{120}u^4.$$

И, наконец, в силу (11) имеем решение исходного уравнения (8):

$$\begin{cases}x=u-\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{10}u^3-\frac{1}{120}u^4,\\ y=\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{10}u^3+\frac{1}{120}u^4.\end{cases}$$

Решая уравнение (8) численными методами, с помощью встроенной функции ППП Matlab 6.5, получаем график функции решения дифференциального уравнения (8). На рисунке изображен график, на котором сплошной линией дано численное решение, а точками обозначено аналитическое решение данного дифференциального уравнения.

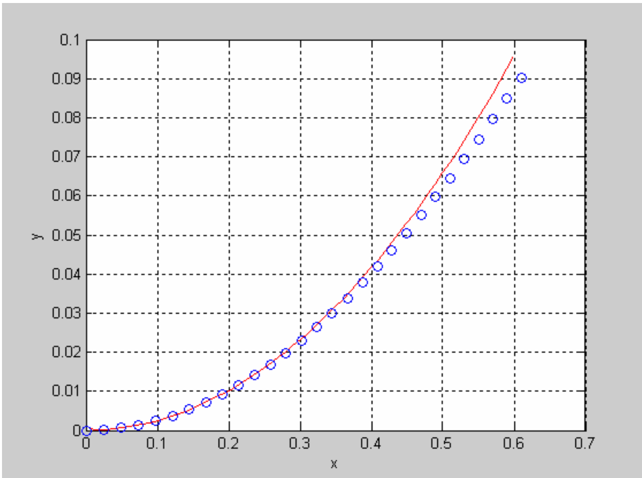

График решения примера.

1. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – 3-е изд., перераб. и доп. – Мн.: Наука и техника, 1979.

Р.В. Соболев, С.М. Доценко, С.П. Волков

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ СОЕВЫХ ПРОДУКТОВ И ОБОСНОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ДЛЯ ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ

In clause technological aspects of development of technology of reception of soya albuminous products are resulted. Theoretically also parameters of process extraction albumens from particles of seeds of a soya are experimentally proved.

Технологический процесс изготовления продуктов на основе или с использованием такой высокобелковой культуры как соя представляет сложную систему, состоящую из совокупности взаимосвязанных и в то же время, обладающих определенной автономностью операций. На рис. 1 представлена схема классификации основных операций технологического процесса приготовления соевых белковых продуктов в виде соевого молока и окары, а также технических средств для его осуществления, разработанная на основании анализа современных тенденций развития направлений по переработке сои.

Согласно разработанной схеме базовыми операциями данной технологии являются:

экстракция (извлечение) белковых веществ из семян сои с помощью растворителя (воды) в процессе измельчения предварительно замоченных или пророщенных семян;

фильтрация жидкой белковой дисперсной системы с одновременным отделением нерастворимого соевого остатка – так называемой окары;

обработка жидкой фазы (соевого молока) и его использование;

обработка твердого нерастворимого остатка и его использование.