Математика. Прикладная математика. Механика

В.В. Сельвинский

ОПРОКИДЫВАНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ НА ШЕРОХОВАТОЙ ВИБРОПЛОСКОСТИ

The conditions of overturning of a cylindrical solid on a vibrating plane are probed in this article. The results of numerical decision of equations of motion are analysed and the critical values of parameters of vibrations for overturning are at.

Поверхность тела цилиндрической формы характеризуется радиусом кривизны в окрестности точки контакта. В устойчивом статическом положении центр масс должен располагаться ниже центра кривизны этой поверхности тела и на одной вертикали с ним. С учетом этих факторов будем рассматривать в качестве цилиндрического тело с поперечным сечением в виде кругового сектора с углом 2α при вершине и радиусом R. Твердое тело опирается на шероховатую горизонтальную плоскость в точке P (рис. 1). Будем считать опрокидывание состоявшимся, если точка P совмещается с одной из крайних точек дуги кругового сектора.

Пусть плоскость совершает поступательные прямолинейные гармонические колебания по закону $\xi = A \cdot Sin(\omega \cdot t)$, направленные под углом β к горизонту.

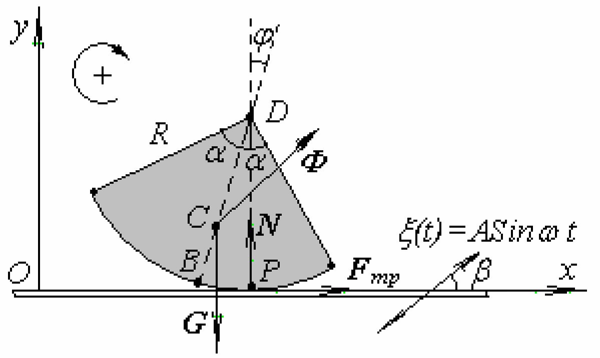

Рис. 1. Твердое тело цилиндрической формы на шероховатой поверхности.

Здесь: A, ω – амплитуда и частота колебаний, t – время. Инерционные свойства тела характеризуются массой M и моментом инерции J_C относительно центра масс C. Положение тела будем задавать координатами центра масс x_C, y_C в системе координат Oxy, связанной с шероховатой плоскостью, и углом поворота φ.

Взаимодействие твердого тела с плоскостью происходит через действие нормальной реакции $\boldsymbol{N}$ и силы трения скольжения Fтр (трением качения пренебрегаем). Будем считать, что трение подчиняется закону Амонтона – Кулона:

$$\left|\boldsymbol{F}_{тр}\right| \le f \cdot N,$$

где f – коэффициент трения скольжения. В данной работе будем рассматривать безотрывное движение, $N \ge 0$.

Тело находится также под действием силы тяжести $\boldsymbol{G}$. В относительном движении ко всем силам необходимо добавить переносную силу инерции:

$$\Phi = M \cdot A \cdot \omega^2 \cdot Sin(\omega \cdot t). \tag{1}$$

Вплоть до момента опрокидывания исследуемое движение может состоять из следующих этапов (возможно, чередующихся): качение без скольжения и качение со скольжением. Все этапы относительного движения описываются системой дифференциальных уравнений, вытекающих из общих теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{x}_C = F_{трx} + \Phi \cdot Cos\beta, \\ M \cdot \ddot{y}_C = N - Mg + \Phi \cdot Sin\beta, \\ J_C \cdot \ddot{\varphi} = -F_{трx} \cdot y_C - N \cdot l \cdot Sin\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

Для более удобной записи считаем положительным направление угла поворота по часовой стрелке. Координаты центра масс $\boldsymbol{C}$ можно представить в виде:

$$x_C = x_D - l \cdot Sin\varphi, \;\; y_C = R - l \cdot Cos\varphi, \tag{3}$$

где x_D, $y_D = R$ – координаты центра кривизны D; $l = CD$.

При качении без скольжения мгновенный центр скоростей находится в точке контакта P, т.е. $vP=0$, или

$$\dot{x}_D = \varphi \cdot R, \quad \dot{y}_D = 0. \tag{4}$$

Используя (3), (4), находим:

$$\ddot{x}_C = \ddot{\varphi} \cdot (R - l \cdot Cos\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cdot l \cdot Sin\varphi, \tag{5}$$

а затем из первого уравнения системы (2) определяем силу трения:

$$\begin{aligned} F_{трx} = M[&-A \cdot \omega^2 \cdot Sin(\omega \cdot t) \cdot Cos\beta + \\ &+ \ddot{\varphi} \cdot (R - l \cdot Cos\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cdot l \cdot Sin\varphi]. \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично, подставляя во второе уравнение выражение

$$\ddot{y}_C = \ddot{\varphi} \cdot l \cdot Sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cdot l \cdot Cos\varphi, \tag{7}$$

определяем нормальную реакцию:

$$\begin{aligned} N = M\big[&\ddot{\varphi} \cdot l \cdot Sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cdot l \cdot Cos\varphi - \\ &- A \cdot \omega^2 \cdot Sin(\omega \cdot t) \cdot Sin\beta + g\big]. \end{aligned} \tag{8}$$

Наконец, используя (6), (8), из третьего уравнения системы (2) получаем дифференциальное уравнение для угла поворота:

$$\ddot{\varphi} = \frac{K}{\frac{J_c}{M} + (R - l \cdot Cos\varphi)^2 + l^2 Sin^2\varphi}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} K = &A \cdot \omega^2 \cdot Sin(\omega \cdot t) \cdot \big[R \cdot Cos\beta - l \cdot Cos(\varphi + \beta\big] - \\ &- g \cdot l \cdot Sin\varphi - \varphi^2 \cdot l \cdot Sin\varphi. \end{aligned}$$

Запишем $\ddot{\varphi}$ в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = \frac{1}{J_p}\{&\Phi \cdot \big[R \cdot Cos\beta - l \cdot Cos(\varphi + \beta\big] - \\ &- M \cdot g \cdot l \cdot Sin\varphi - M \cdot \varphi^2 \cdot l \cdot Sin\varphi\}, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$J_P = J_C + M(R - l \cdot Cos\varphi)^2 + Ml^2 \cdot Sin^2\varphi.$$

Перейдем к безразмерным величинам: $\tau = \omega \cdot t$ – время; $\tilde{F}_{тр} = \dfrac{F_{тр}}{M \cdot A \cdot \omega^2}$ – сила трения; $\tilde{N} = \dfrac{N}{M \cdot A \cdot \omega^2}$ – нормальная реакция; $z = \dfrac{g}{A \cdot \omega^2}$ – параметр разгрузки;

$\tilde{J}_P = \dfrac{J_P}{A^2 \cdot M}$ – момент инерции; $\tilde{h} = \dfrac{h}{A}$ – высота; $\tilde{R} = \dfrac{R}{A}$ – радиус; $\tilde{l} = \dfrac{l}{A}$ – длина; $\varphi'' = \dfrac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \dfrac{\ddot{\varphi}}{\omega^2}$, $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{\dot{\varphi}}{\omega^2}$ – производные; $x_C'' = \dfrac{\ddot{x}_C}{A \cdot \omega^2} = \dfrac{d^2 x_C}{d\tau^2}$ – ускорение.

Тогда выражения (6), (8), (9) примут вид (в дальнейшем для упрощения записи волну в обозначениях безразмерных переменных будем опускать):

$$F_{mp} = -Sin\tau \cdot Cos\beta + \varphi'' \cdot (R - l \cdot Cos\varphi) + \varphi'^2 \cdot l \cdot Sin\varphi, \quad (11)$$

$$N = \varphi'' \cdot l \cdot Sin\varphi + \varphi'^2 \cdot l \cdot Cos\varphi - Sin\tau \cdot Sin\beta + z, \quad (12)$$

$$\varphi'' = \frac{1}{J_P}\{Sin\tau \cdot [R \cdot Cos\beta - l \cdot Cos(\varphi + \beta)] - l \cdot Sin\varphi \cdot [z + \varphi'^2 \cdot R]\} \quad (13)$$

Последнее уравнение в конечном виде не интегрируется. Для решения его численным методом перейдем к следующим переменным:

$$X_0 = x_C, \quad X_1 = x_C', \quad X_2 = \varphi, \quad X_3 = \varphi'. \quad (14)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений в нормальном виде для этапа качения без скольжения:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_0}{d\tau} = X_1, \\ \dfrac{dX_1}{d\tau} = M_\varphi \cdot (R - l \cdot CosX_2) + X_3^2 \cdot l \cdot SinX_2, \\ \dfrac{dX_2}{d\tau} = X_3, \\ \dfrac{dX_3}{d\tau} = M_\varphi, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$M_\varphi = \frac{1}{J_P}\left\{Sin\tau \cdot \left[R \cdot Cos\beta - l \cdot Cos(X_2 + \beta)\right] - l \cdot SinX_2\left[z + X_3^2 \cdot R\right]\right\}.$$

Движение твердого тела будет подчиняться системе уравнений (15) до тех пор, пока выполняется условие

$$|F_{mpx}| < f \cdot N, \quad (16)$$

где F_{mpx} и N определяются из (11) и (12):

$$F_{mpx} = -Sin\tau \cdot Cos\beta + M_\varphi \cdot (R - l \cdot CosX_2) + X_3^2 \cdot l \cdot SinX_2, \quad (17)$$

$$N = M_\varphi \cdot l \cdot SinX_2 + X_3^2 \cdot l \cdot CosX_2 - Sin\tau \cdot Sin\beta + z. \quad (18)$$

В противном случае наступает этап качения со скольжением. При этом выражение силы трения заменяется на предельное:

$$F_{mpx} = -f \cdot N \cdot Sign\, v_{Px}, \quad (19)$$

где

$$v_{Px} = x_C' - \varphi'(R - l \cdot Cos\varphi) = X_1 - X_3(R - l \cdot CosX_2) \quad (20)$$

– проекция скорости точки контакта на ось Ox. Непосредственно в переходный момент полагаем $Sign\, v_{Px} = -Sign\, F_{mpx}$, где F_{mpx} вычисляется еще по (17).

Из системы (2) с учетом (18), (19) получим два дифференциальных уравнения второго порядка. Переходя к безразмерным величинам, имеем:

$$x_C'' = -f \cdot N \cdot Sign\, v_{Px} + Sin\tau \cdot Cos\beta, \quad (21)$$

$$\varphi'' = \frac{N}{J_C}\left(f \cdot Sign\, v_{Px}\left(R - l \cdot Cos\varphi\right) - l \cdot Sin\varphi\right). \quad (22)$$

Нормальная реакция будет определяться так же, как и при качении без скольжения, т.е. уравнением (12), и в безразмерных переменных, с учетом (22), будет выглядеть следующим образом:

$$N = \frac{J_C \cdot \left(\varphi'^2 \cdot l \cdot Cos\varphi - Sin\tau \cdot Sin\beta + z\right)}{J_C - f \cdot Sign\, v_{Bx} \cdot l \cdot \left(R - l \cdot Cos\varphi\right) \cdot Sin\varphi + l^2 \cdot Sin^2\varphi}. \quad (23)$$

Уравнения (21), (22) также не интегрируются в явном виде. Для численного решения этих уравнений перейдем к переменным (14) и запишем систему в нормальном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_0}{d\tau} = X_1, \\ \dfrac{dX_1}{d\tau} = -f \cdot N \cdot Sign\, v_{Px} + Sin\tau \cdot Cos\beta, \\ \dfrac{dX_2}{d\tau} = X_3, \\ \dfrac{dX_3}{d\tau} = \dfrac{N}{J_C}\left(f \cdot Sign\, v_{Px}\left(R - l \cdot CosX_2\right) - l \cdot SinX_2\right), \end{cases} \quad (24)$$

где

$$N = \frac{J_C \cdot \left(X_3^2 \cdot l \cdot CosX_2 - Sin\tau \cdot Sin\beta + z\right)}{J_C - f \cdot Sign\, v_{Px} \cdot l \cdot \left(R - l \cdot CosX_2\right) \cdot SinX_2 + l^2 \cdot Sin^2 X_2}, \quad (25)$$

а v_{Px} определяется из (20). Движение твердого тела подчиняется уравнениям (24) до момента $v_{Px} = 0$ при одновременном выполнении условий (16) – (18). В противном случае наступает этап качения без скольжения и вступают в силу уравнения (17).

Заметим, что знаменатель в выражении (25) допускает неопределенность при достаточно больших значениях коэффициента трения f (деление на нуль). В такой ситуации рассмотренная математическая модель перестает отражать реальное движение. Возникают явления типа заклинивания, известные из парадоксов П. Пэнлеве в теории сухого трения. Всего этого заведомо не произойдет, если коэффициент трения будет удовлетворять условию:

$$f < \frac{J_C}{l \cdot R}.$$

Если тело раскачивается без проскальзывания, то есть смысл говорить о собственной частоте малых колебаний. Собственную частоту мы можем определить из уравнения (9) после его линеаризации в окрестности значения $\varphi = 0$ (для предварительной оценки резонансной ситуации полагаем $\beta = 0$):

$$\varphi'' = -\frac{z \cdot l}{J_C + (R - l)^2} \cdot \varphi + \frac{(R - l)}{J_C + (R - l)^2} Sin\,\tau \cdot$$

Тогда собственная частота запишется в следующем виде:

$$\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{z \cdot l}{J_C + (R - l)^2}}. \quad (26)$$

Случай $\tilde{\omega}_0 = 1$ соответствует «резонансу», при котором собственная частота совпадает с частотой вибраций шероховатой поверхности. Из равенства (26) при $\tilde{\omega}_0 = 1$ получаем зависимость:

$$z = \frac{J_C + (R - l)^2}{l}. \quad (27)$$

Обозначим:

$$\kappa = \frac{l}{R}, \quad \mu = \frac{J_C}{R^2}.$$

Тогда равенство (27) примет вид:

$$z = \frac{R \cdot \left[\mu + (1-\kappa)^2 \right]}{\kappa}. \qquad (28)$$

Собственная частота определяет множество резонансных значений параметров механической системы. Резонансные кривые при некоторых значениях параметра μ представлены в виде обратной зависимости *k(z)* на рис. 2.

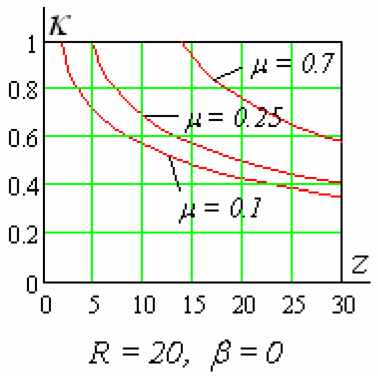

Рис. 2. Общий вид резонансных кривых.

Если угол вибрации β отличен от нуля, значение $\tilde{\omega}_0 = 1$ перестает быть резонансным, однако в окрестности этого значения вполне естественно ожидать проявления резонансных эффектов, при которых происходит раскачивание твердого тела. Конечно, здесь свое влияние будут оказывать также наличие или отсутствие проскальзывания в точке контакта.

Для вибрационного транспортирования и ориентирования первичными характеристиками являются средняя скорость *V* перемещения центра масс и максимальное отклонение $Am = \varphi_{max} / \pi$ угловой координаты φ: средняя скорость определяет производительность процесса транспортирования, величина *Am* – степень устойчивости цилиндрического тела к опрокидыванию. На рис. 3, 4 представлены зависимости указанных характеристик от параметра разгрузки *z* при некоторых значениях остальных параметров системы, охватывающих диапазон технически реализуемых ситуаций.

Все расчеты и построения выполнены на основе математического пакета Mathcad 13. Все параметры безразмерны, для перехода к соответствующим размерным величинам нужно: радиус *R* умножать на амплитуду вибрации *A (м)*; скорость V умножать на произведение $A\omega$ (*м/с*; ω – частота вибраций, c^{-1}); максимальное отклонение *Am* умножать на число π (*рад*). С ростом параметра разгрузки *z* интенсивность вибраций уменьшается и, наоборот, с приближением *z* к нулю – неограниченно возрастает (насколько позволяют технические возможности).

На основе анализа результатов численного исследования описанной математической модели можно сделать следующие выводы относительно выборочного влияния параметров:

при уменьшении радиуса *R* средняя скорость V изменяется несущественно (рис. 3а), а пик интенсивности раскачивания *Am* цилиндрического тела растет и смещается влево к меньшим значениям z (рис. 4а);

при увеличении угла вибрации β (по крайней мере, от нуля до π/6) средняя скорость *V* возрастает (рис. 3б), а интенсивность раскачивания *Am* цилиндрического тела практически не меняется, за исключением окрестности значения *z = 5* (рис. 4б);

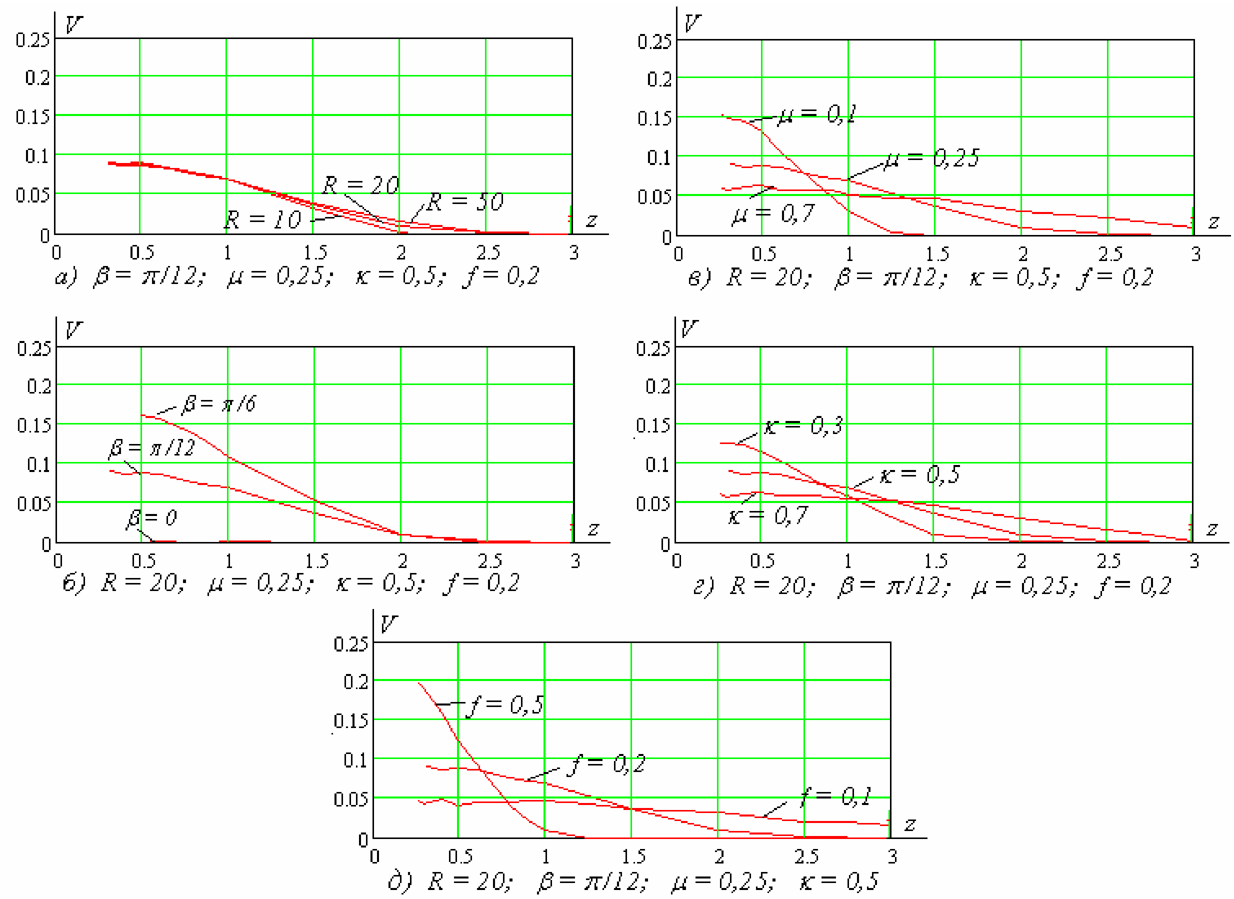

Рис. 3. Графики зависимости средней скорости перемещения центра масс.

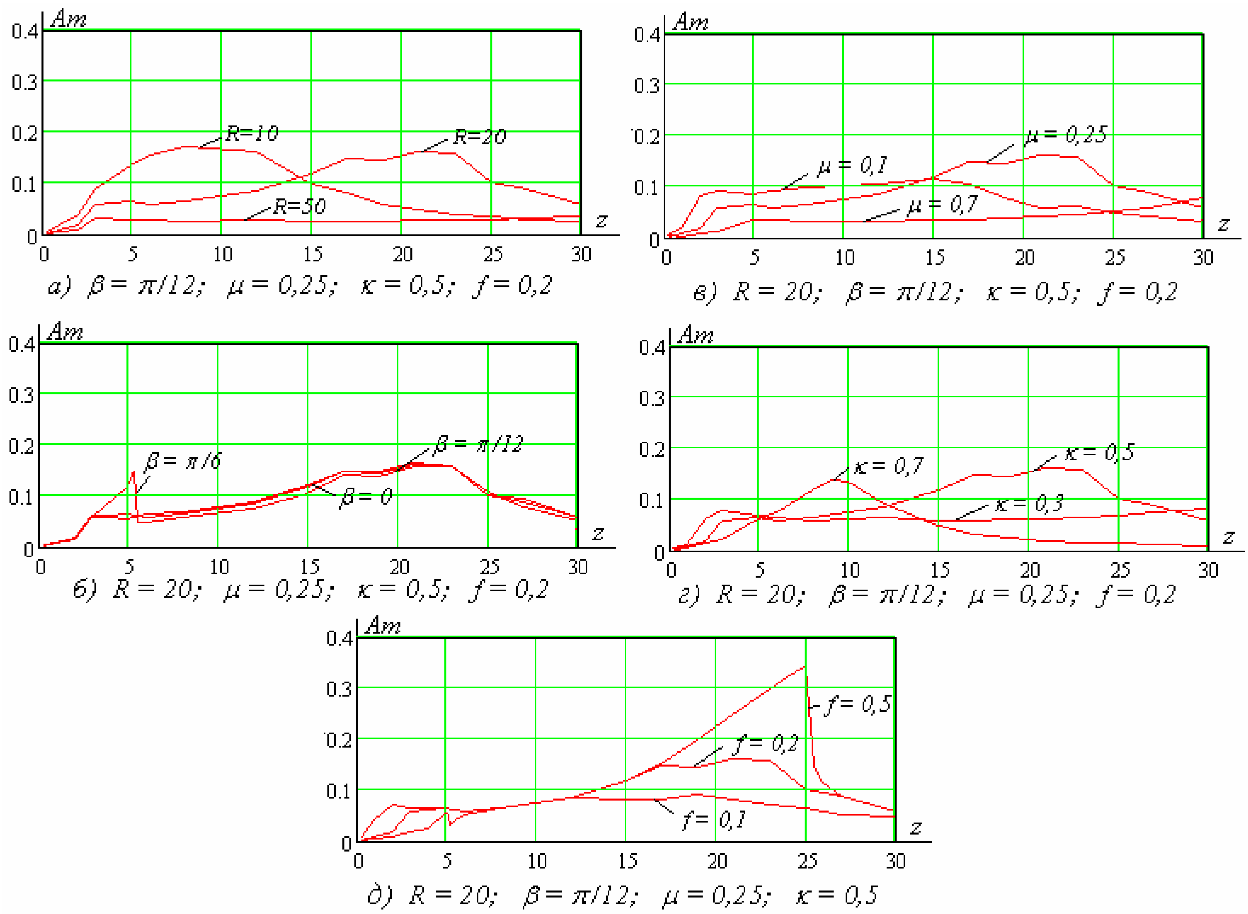

Рис. 4. Графики зависимости максимального отклонения угловой координаты.

при уменьшении центрального момента инерции μ средняя скорость V возрастает в окрестности значения z = 0.5 и убывает в окрестности значения z = 1.5 (рис. 3в), а пик интенсивности раскачивания *Am* цилиндрического тела размывается и смещается влево к меньшим значениям z (рис. 4в);

при уменьшении параметра k средняя скорость V возрастает в окрестности значения $z = 0.5$ и убывает в окрестности значения $z = 1.5$ (рис. 3г), интенсивность раскачивания Am возрастает в интервале $0 < z < 5$, при $z > 5$ зависимость *Am(z)* имеет пик, который смещается вправо и размывается (рис. 4г);

при увеличении коэффициента трения f средняя скорость V возрастает в окрестности значения $z = 0.5$ и убывает в окрестности значения $z = 2$ (рис. 3д), интенсивность раскачивания *Am* возрастает всюду, за исключением интервала $7 < z < 12$, где она практически не зависит от f.

Наличие остроконечных пиков на графиках зависимостей *Am(z)* можно объяснить существованием резонансных значений и граничных эффектов между режимами чистого качения и качения со скольжением, вызывающих резкое падение интенсивности раскачивания *Am*.

Следует отметить также приблизительность условия опрокидывания, определенного в начале параграфа. Как только точка контакта P совмещается с крайней точкой дуги кругового сектора, начинается процесс опрокидывания через угловую точку, подчиняющийся другим дифференциальным уравнениям [4]. К тому же нестационарные нагрузки могут случайным образом вернуть опрокидывающееся твердое тело в исходное состояние. Преодоление этих неопределенностей в общем случае пока не представляется возможным.

1. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1983.
3. Маркеев А.Н. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. – М.: Наука, 1992.
4. Сельвинский В.В. Опрокидывание твердого тела на виброплоскости // Вестник АмГУ. – Вып. 35. – Благовещенск, 2006. – С. 3-5.