

ранее представленных формул можно сформировать зависимость вида:

$$K_r(z) = \frac{1 - e^{-Tz}}{z(1 - e^{-(T+T_B)z})} = \frac{1 - e^{-Tz}}{z} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(T+T_B)z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k(T+T_B)z} - e^{-(k(T+T_B)+T)z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k(T+T_B)}^{k(T+T_B)+T} e^{-tz} dt.$$

Из представленного выражения следует, что функция $K_r(t)$ тождественно равна единице на интервалах $[k(T+T_B); k(T+T_B)+T]$, $k=0, 1, 2, \dots$, и равна нулю вне этих интервалов, т.е.:

$$K_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } k(T+T_B) < t \leq k(T+T_B)+T, \\ k=0, 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{если } k(T+T_B)+T < t \leq (k+1)(T+T_B), \\ k=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

График соответствующей функции готовности приведен на рис. 3.

Достаточно очевидно, что в этом случае стационарный режим не имеет места, а коэффициента готовности не существует.

На основании представленных результатов можно констатировать следующие выводы.

Для экспоненциальных распределений периоды восстановления элементов незначительно влияют на показатели надежности всей системы, особенно если ее функционирование протекает при дополнительном условии «быстрого» восстановления. Если же законы распределения оказываются не экспоненциальными, то процесс восстановления может оказать существенное влияние на надежность системы.

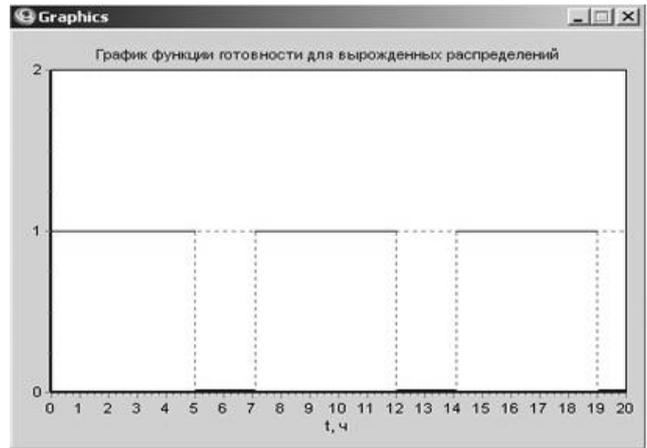


Рис. 3. Графики функции готовности вида (12).

ность системы. И система может вовсе не прийти в исправное состояние.

Иными словами, экспоненциальные законы распределения можно использовать только в том случае, когда потоки отказов и восстановлений являются простейшими, т.е. обладают свойством ординарности, стационарности и отсутствия последствия.

1. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
2. Острейковский В.А. Теория надежности. – М.: Высш. шк., 2008.
3. Александровская Л.Н., Афанасьев А.П., Лисов А.А. Современные методы обеспечения безотказности сложных технических систем. – М.: Логос, 2001.

Н.В. Кван, Н.П. Семичевская

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, БЫСТРОЙ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ И НАБЛЮДАТЕЛЕМ

This article is devoted a synthesis problem robust algorithms for control systems of a priori uncertain unstable nonlinear scalar objects containing delay, with use of stationary observer Ljuenbergera and quick-response is obvious-implicit reference model.

Введение

В данной работе предлагается при синтезе системы управления скалярным нелинейным объектом с запаздыванием использовать стационарный наблюдатель полного порядка и быстродействующую явно-неявную эталонную модель (БЭМ). Показано, что применение БЭМ повышает эффективность оценок переменных состояния и допускает упрощение технической реализации эталона.

Математические модели системы управления и постановка задачи

Пусть динамика нелинейно-нестационарного объекта управления с запаздыванием в пространстве состояний, действующего в условиях априорной параметрической неопределенности, описывается уравнениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_{\xi}(x, t, \tau) + bu(t) + f_{\xi}(t), \quad (1)$$

$y(t) = L^T x(t) = x_1(t)$, $\xi \in \Xi$, где $x^T(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ – вектор состояния; $u(t)$, $y(t)$ – скалярные управление и выход; t – положительное постоянное запаздывание при условии, что $x(q) = \varphi(q)$ при $-\tau \leq q \leq 0$, где $\varphi(q)$ – заданная начальная непрерывная

функция; $f_{\xi}^T(t) = [0, \dots, 0, f_n(t)]$ – возмущение; ξ – набор неизвестных параметров, принадлежащих известному множеству Ξ , $|f_n(t)| J f_0^2 = const$; $b^T = [0, \dots, 0, 1]$. Предполагается, что нелинейная векторная функция $A_{\xi}(x, t, \tau)$ представима в виде:

$$A_{\xi}(x, t, \tau) = A_{\xi}x(t) + b\alpha_{\xi}(x) + b\delta^T x(t - \tau), \quad (2)$$

где $A_{\xi} = A$ – некоторая стационарная матрица, для которой верно следующее представление:

$$A = A_M + b\chi_0^T, \quad (3)$$

где A_M – желаемая матрица, а χ_0 – некоторый вектор; $\alpha_{\xi}(x) = \alpha(x)$ – нелинейная скалярная функция, $\alpha_0^- \leq \alpha(t) \leq \alpha_0^+$; δ – некоторая векторная функция.

Пусть требуемая динамика БЭМ задана уравнениями

$$\frac{dz_M(t)}{dt} = a_0 z_M(t) + a_0 r(t), \quad y_M(t) = z_M(t), \quad (4)$$

где $z_M(t)$, $y_M(t)$, $r(t) \in R$ – соответственно эталонная переменная, выход и задающее воздействие; $a_0 = const > 0$ – достаточно большое число. Следуя [6], математическую модель БЭМ (4) можно представить следующим образом:

$$\frac{dx_M(t)}{dt} = A_M x_M(t) + br(t), \quad v_M(t) = y_M(t) = g^T x_M(t), \quad (5)$$

где $x_M(t) \in R^n$ – вектор состояния эталона; $v_M(t) \in R$ – обобщенный выход эталона. Очевидно, что передаточная функция БЭМ вида (4), приобретая новую форму записи, сохраняет прежнее значение

$$W_{БЭМ}(s) = g^T (sE - A_M)^{-1} b = \frac{g^T (sE - A_M)^+ b}{\det(sE - A_M)} = \frac{a_0}{s + a_0}.$$

Если теперь для системы управления (1), (2), (5) ввести

в рассмотрение ошибку $e(t) = (x_M(t) - x(t))$ и типовое математическое описание вида:

$$\frac{de(t)}{dt} = A_M e(t) + b\mu(t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= g^T e(t) = g^T (x_M(t) - x(t)), \\ \mu(t) &= r(t) - u(t) - \chi_0^T x(t) - \alpha(t)x_1(t) - \\ &- \delta^T x(t - \tau) - f_n(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $v(t)$ – обобщенный выход системы управления; $\mu(t)$ – видоизмененное управление, то оказывается, что система (6), (7) технически не реализуема, так как, за исключением переменной $x_1(t)$, другие элементы вектора $x(t)$ измерению недоступны. Чтобы обеспечить работоспособность системы управления (6), (7) необходимо осуществить восстановление недостающих переменных состояния.

Оценку вектора $x(t)$ будем проводить по наблюдениям за текущим изменением выхода объекта $y(t)$, используя аналогично [1-4], наблюдатель полного порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= A_* \bar{x}(t) + bu(t) + Ny(t), \quad \bar{y}(t) = L^T \bar{x}(t) = \bar{x}_1(t), \\ \bar{v}(t) &= \bar{g}^T \bar{x}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния наблюдателя; $\bar{v}(t) \in R$ – обобщенный выход наблюдателя; $A_* = (A_M - NL^T)$ – матрица состояния наблюдателя, собственные числа которой получают заданные значения за счет соответствующей матрицы N ; значения элементов матрицы N вычисляются из условия равенства соответствующих коэффициентов полиномов $\det(sE - A_*)$ и $\det(sE - A_M + NL^T)$; $\bar{g} = gK^{-1}$; K – коэффициент согласования в установившемся режиме значений $\bar{v}(t)$ и $v_M(t)$, величина которого определяется соотношением $K = \lim_{s \rightarrow 0} g^T (sE - A_*)^{-1} N = -g^T A_*^{-1} N$.

Как показано в [2], чтобы обеспечить быстрый темп стабилизации невязки $\bar{e}(t) = (x(t) - \bar{x}(t))$, корни характеристического уравнения $(sE - A_*)$ должны лежать существенно левее корней характеристического уравнения $(sE - A_M)$, что для матриц A_M и A_* всегда выполнимо. При этом аналогично [2, 4] асимптотическое поведение невязки $\bar{e}(t)$

будет удовлетворять соотношению $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}(t) = 0$, что позволяет в системе управления (6), (7), учитывая (8), заменить вектор состояния $x(t)$ его оценкой $\bar{x}(t)$ и получить технически реализуемые уравнения обобщенного выхода и видоизмененного управления:

$$\begin{aligned} v(t) &= g^T \bar{e}(t) = g^T (x_M(t) - \bar{x}(t)), \\ \mu(t) &= r(t) - u(t) - \chi_0^T \bar{x}(t) - \alpha(t)\bar{x}_1(t) - \delta^T \bar{x}(t - \tau) - f_n(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, если при решении соответствующей задачи синтеза алгоритмов системы управления (6), (7) использовать математическое описание (9) и уравнение (8), дающее оценку $\bar{x}(t)$, то алгоритмы, полученные для системы управления (6), (8), (9), будут применимы для систем (6) – (8) и (1), (2), (5), (8).

Постановка задачи. Требуется для системы (6), (8), (9), функционирующей в условиях априорной неопределенности параметров $\xi \in \Xi$ и начальных условий $x(0)$, определить явный вид закона управления

$$u(t) = u(r(t), \bar{x}(t), \bar{x}(t - \tau)) \quad (10)$$

таким образом, чтобы имело место выполнение предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - \bar{x}(t)\| \cong \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - x(t)\| \leq \bar{\delta}_x^2, \quad (11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - \bar{y}(t)| \cong \lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - y(t)| \leq \bar{\delta}_y^2, \quad (12)$$

где $\bar{\delta}_x^2, \bar{\delta}_y^2 = const$ – некоторые относительно малые числа.

Синтез робастного закона управления

Синтез алгоритма системы управления на основе критерия гиперустойчивости, следуя [6], будем проводить поэтапно.

Первый этап. Как уже отмечалось, используя оценку (8), математическое описание системы (1), (2), (5) или эквивалентной системы (6), (7), с учетом замены (9), будем рассматривать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= A_M e(t) + b\mu(t), \\ v(t) &= g^T \bar{e}(t) = g^T (x_M(t) - \bar{x}(t)), \\ \mu(t) &= r(t) - u(t) - \chi_0^T \bar{x}(t) - \alpha(t)\bar{x}_1(t) - \delta^T x(t - \tau) - f_n(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Второй этап. Очевидно, что условие строгой положительной определенности для вещественной части частотной передаточной функции стационарной части системы (13) выполнено, поскольку для аperiодического звена первого порядка всегда имеет место частотное неравенство

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \operatorname{Re} g^T (j\omega E - A_M)^{-1} b = \frac{a_0}{\sqrt{\omega^2 + a_0^2}} > 0, \quad (14)$$

$$\forall \omega \in (-\infty, +\infty).$$

Третий этап. Разрешение модифицированного интегрального неравенства В.М. Попова (МИНП) [7]:

$$\eta(0, t) = -\int_0^t \mu(s)v(s)Q(s)ds \geq -\gamma^2 = const, \quad \forall t > 0, \quad (15)$$

рассматриваемого относительно нелинейной нестационарной части системы (13), связано с синтезом явного вида закона управления $u(t)$. Для упрощения процедуры построения алгоритма $u(t)$ представим его в виде шести составляющих и оценим каждую составляющую в отдельности:

$$\eta(0, t) = \sum_{i=0}^5 \eta_i(0, t),$$

где

$$\begin{aligned} \eta_0(0, t) &= -\int_0^t r(s)v(s)Q_1 ds = -\int_0^t r(s)v(s)|v(s)| ds \pm \\ &\pm \gamma_0 \int_0^t |r(s)| |v(s)|^2 ds \geq -\gamma_0 \int_0^t |r(s)| |v(s)|^2 ds; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \eta_1(0, t) &= \int_0^t \chi_0^T \bar{x}(s)v(s)Q_2 ds = \int_0^t \chi_0^T \bar{x}(s)v(s)|v(s)| ds \pm \\ &\pm \sum_{i=1}^n \int_0^t \gamma_{1i} |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds \geq -\sum_{i=1}^n \int_0^t \gamma_{1i} |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \eta_2(0, t) &= \int_0^t (\alpha(x(s))\bar{x}_1(s)v(s)Q_3(s) ds = \\ &= \int_0^t (\alpha(x(s))\bar{x}_1(s)v(s)|v(s)| ds \pm \\ &\pm \gamma_2 \int_0^t (|\bar{x}_1(s)|^{\sigma+1} + I)|v(s)|^2 ds \geq - \\ &- \gamma_2 \int_0^t (|\bar{x}_1(s)|^{\sigma+1} + I)|v(s)|^2 ds; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\eta_3(0, t) = \int_0^t f_n(s) \nu(s) Q_3(s) ds = \int_0^t f_n(s) \nu(s) |v(s)| ds \pm \pm \gamma_3 \int_0^t f_0^2 |v(s)|^2 ds \geq -\gamma_3 \int_0^t |v(s)|^2 ds; \tag{19}$$

$$\eta_4(0, t) = \int_0^t \delta(\bar{x}_i(s - \tau)) \nu(s) Q_i ds = \int_0^t \delta(\bar{x}_i(s - \tau)) \nu(s) |v(s)| ds \pm \pm \sum_{i=1}^n \int_0^t \gamma_{4i} |\bar{x}_i(s - \tau)| |v(s)|^2 ds \geq \geq -\sum_{i=1}^n \int_0^t \gamma_{4i} |\bar{x}_i(s - \tau)| |v(s)|^2 ds; \tag{20}$$

$$\eta_5(0, t) = \int_0^t u(s) \nu(s) ds. \tag{21}$$

Таким образом, получаем оценку интеграла $\eta(0, t)$:

$$\eta(0, t) \geq -\gamma_0 \int_0^t |r(s)| |v(s)|^2 ds - \sum_{i=1}^n \int_0^t \gamma_{1i} |\bar{x}_i| |v(s)|^2 ds - -\gamma_2 \int_0^t (|\bar{x}_i|^{\sigma+1} + I) |v(s)|^2 ds - \gamma_3 \int_0^t |v(s)|^2 ds - -\sum_{i=1}^n \int_0^t \gamma_{4i} |\bar{x}_i(s - \tau)| |v(s)|^2 ds + \int_0^t u(s) \nu(s) ds,$$

или

$$\eta(0, t) \geq \int_0^t (u(s) \text{sign}(\nu(s)) - \gamma_0 |r(s)| |v(s)| - -\sum_{i=1}^n \gamma_{1i} |\bar{x}_i| |v(s)| - \gamma_2 (|\bar{x}_i|^{\sigma+1} + I) |v(s)| - -\gamma_3 |v(s)| - \sum_{i=1}^n \gamma_{4i} |\bar{x}_i(s - \tau)| |v(s)|) |v(s)| ds.$$

Для получения оценки (15) и явного вида алгоритма $u(t)$ приравняем к нулю подынтегральное выражение, стоящее в скобках. Окончательно имеем:

$$u(t) = (\gamma_0 |r(t)| + \sum_{i=1}^n \gamma_{1i} |\bar{x}_i(t)| + \gamma_2 (|\bar{x}_i(t)|^{\sigma+1} + I) + \gamma_3 + + \sum_{i=1}^n \gamma_{4i} |\bar{x}_i(t - \tau)|) |v(t) \tag{22}$$

$$\eta(0, t) \geq -\gamma^2 = \text{const}, \quad \forall t > 0.$$

Четвертый этап. Покажем, что в системе (8), (13), (22) достижимо выполнение поставленных целей управления (11), (12).

Действительно, поскольку для системы (13), (22), использующей наблюдатель (7), выполнены частотное и интегральное неравенства (7) и (14), система управления (8), (13), (22) гиперустойчива, – следовательно, достижимы предельные условия (11) и (12). Кроме того, поскольку цели управления (11), (12) имеют место при любых начальных значениях $x(0)$ и в условиях априорной неопределенности $\xi \in \Xi$, то система управления (8), (13), (22) является робастной в рассматриваемом классе Ξ .

Поскольку система (7), (12), (22) и система (5)–(7), (22) или (1), (2), (4), (7), (22) эквивалентны, то они также будут робастными в заданном классе X и в них будут достижимыми и цели управления (10), (11). Структурная схема робастной системы управления (1), (2), (4), (7), (22) представлена на рис. 1, а схема робастного регулятора – на рис. 2.

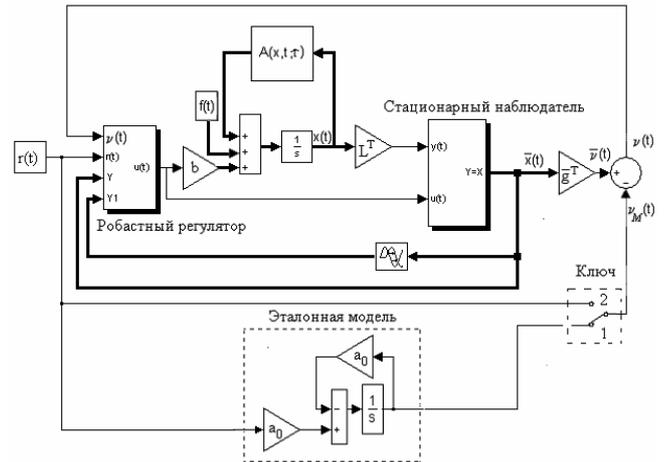


Рис. 1. Структурная схема системы с быстродействующей явно-неявной эталонной моделью.

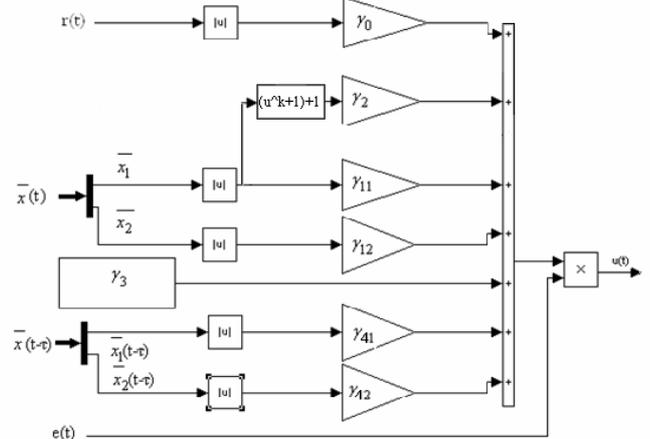


Рис. 2. Структурная схема робастного регулятора.

Иллюстративный пример

Имеем робастную систему управления (1), (2), (4), (7), (22) с соответствующими: задающим воздействием, внешним возмущением и нелинейной векторной функцией с постоянным запаздыванием

$$r(t) = \sin(0.01t), \tag{23}$$

$$f_2(t) = 0.3 \sin(0.5t), \tag{24}$$

$$A(x, t) = \begin{pmatrix} x_2(t), x_3(t), 11x_1(t) - 6x_2(t) + \\ |y(t)|^{0.3} \text{sign}(y(t)) + 2x_1(t-1) + x_2(t-1) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Быстрая эталонная модель выбрана с коэффициентом a_0 , равным 10, что позволяет заметить фактическое совпадение задающего воздействия $r(t)$ и выхода эталонной модели $v_m(t)$:

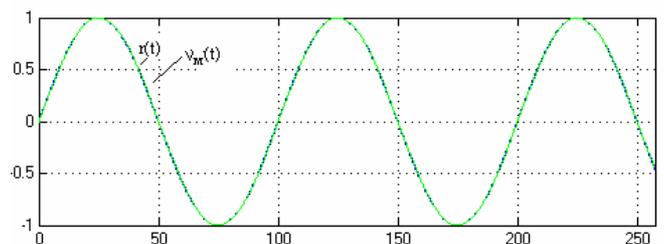


Рис. 3. Динамика рассогласования между входом и выходом БЭМ.

При использовании наблюдателя (8) с матрицей A_e , собственные значения которой выбраны существенно левее собственных чисел матрицы A_M , получен вектор $\bar{g}^T = (1.23, 0.123)$, необходимый для формирования обобщенного выхода наблюдателя.

В ходе моделирования робастного закона управления подобраны следующие значения:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 140, \gamma_{11} = 185, \gamma_{12} = 165, \gamma_2 = 225, \gamma_3 = 200, \\ \gamma_{41} &= 170, \gamma_{42} = 165. \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 4 и 5 приведены соответственно изменения ошибки регулирования и управляющего воздействия в системе управления (1), (2), (4), (7), (22)-(26).

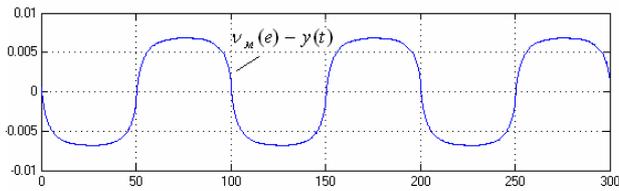


Рис. 4. Динамика ошибки регулирования

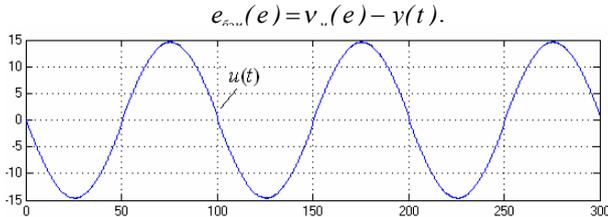


Рис. 5. Динамика управляющего воздействия $u(t)$.

На этапе моделирования возможно получить более простую техническую реализацию системы (1), (2), (7), (22), заменив БЭМ на неявную эталонную модель [6], при этом

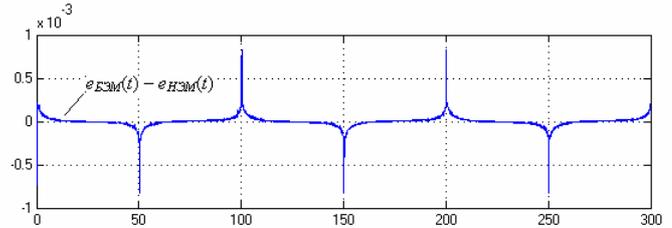


Рис. 6. Динамика рассогласования $(e_{БЭМ}(t) - e_{НЭМ}(t))$.

величина рассогласования $(e_{БЭМ}(t) - e_{НЭМ}(t))$ существенно мала, что видно на рис. 6.

1. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Краснова С.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем: автореф. дис. ...д-ра техн. наук. – М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова, 2003.
3. Семичевская Н.П. Нелинейное робастное управление нестационарными объектами со стационарным наблюдателем // Информатика и системы управления. – 2006. – № 1(11). С. 202-211.
4. Еремин Е.Л., Семичевская Н.П., Чепак Л.В. Нелинейно-робастная система управления с явно-неявным эталоном для нестационарных SISO-объектов с запаздыванием по состоянию // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2007. – № 1. – С.4-20.
5. Еремин Е.Л., Чепак Л.В. Алгоритмы робастного нелинейного управления нестационарными скалярными объектами // Информатика и системы управления. – 2007. – № 1(13). – С.149-160.
6. Еремин Е.Л., Кван Н.В., Семичевская Н.П. Робастное управление нелинейным объектом со стационарным наблюдателем и быстродействующей эталонной моделью // Информатика и системы управления. – 2008. – № 4(18). – С.122-130.
7. Еремин Е.Л., Галаган Т.А., Семичевская Н.П. Нелинейное робастное управление нестационарными объектами. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2006.
8. Бобцов А.А. Адаптивное и робастное управление параметрически и функционально неопределенными объектами в условиях возмущений и запаздывания: автореф. дис. ...д-ра техн. наук. – СПб: СПбГУИТМО, 2006.