

В.В. Еремينا, С.А. Новиков

АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТОВ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

The analysis of the critical influence of the free distribution refusal and reconstruction on no stationary of the factors to reliability with using the Automatic system of the calculation to reliability technical and information systems.

Практическое решение задач, возникающих в рамках теории надежности систем, обнаруживает важность расчета и рассмотрения их нестационарных характеристик, часто не принимаемых во внимание [1-3]. Однако, как показывают вычислительные эксперименты, продолжительность переходного процесса может быть довольно большой. Кроме того, существуют системы, стационарное состояние которых вообще не наступает. Учитывая названные обстоятельства, авторы разработали пакет прикладных программ, предназначенный для вычисления соответствующих характеристик, а также их качественного и количественного анализа. При этом обсуждаемые результаты получены непосредственно с помощью данного программного продукта.

Рассмотрим работу восстанавливаемого элемента с двумя состояниями – исправной работы ξ_k и восстановления η_k . Общая картина работы рассматриваемого объекта может быть изображена в виде временной диаграммы, представляющей последовательное чередование периодов: $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ и т.д. Допустим, что случайные величины ξ_k и η_k независимы и имеют плотности $f_k(t)$ и $g_k(t)$. При этом через $F_k(t)$ и $G_k(t)$ обозначим функции распределения сумм $\sum_{i=1}^k \xi_i$ и $\sum_{i=1}^k \eta_i$, через $F_{k,l}(t)$ – функцию распределения суммы случайных величин $\sum_{i=1}^k \xi_i + \sum_{i=1}^l \eta_i$, а также будем полагать, что $F_0(t) = G_0(t) = 1$.

Пусть функции $M(t)$ и $M_B(t)$ описывают математические ожидания, характеризующие среднее число отказов и среднее число восстановлений элемента в диапазоне времени $[0; t]$. Скорости изменения среднего числа отказов и среднего числа восстановлений могут быть представлены в виде:

$$\omega(t) = M'(t); \quad \omega_B(t) = M_B'(t).$$

Принимая во внимание, что

$$M(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau; \quad M_B(t) = \int_0^t \omega_B(\tau) d\tau, \quad \text{можно показать:}$$

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k+1,k}(t); \quad M_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k,k}(t).$$

В свою очередь представим функцию готовности как:

$$K_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t),$$

где $p_k(t)$ – вероятность того, что момент времени t приходится на k -й интервал исправной работы элемента.

Поскольку

$$p_k(t) = P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i + \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i < t < \sum_{i=1}^k \xi_i + \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i\right) = F_{k-1,k-1}(t) - F_{k,k-1}(t),$$

$$\text{то } K_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (F_{k,k}(t) - F_{k+1,k}(t))$$

Если законы распределения времени исправной работы на каждом интервале одинаковы и имеют плотность

$f(t)$, а законы распределения времени восстановления имеют плотность $g(t)$, то k -кратную свертку функции f будем обозначать через $f^{*(k)}(t)$.

В этом случае параметры потоков отказов и восстановлений элемента оказываются равными:

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{*(k+1)} \cdot g^{*(k)}(t); \quad \omega_B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{*(k)} \cdot g^{*(k)}(t).$$

Следовательно, функция готовности примет вид:

$$K_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{*(k)} \cdot g^{*(k)} \cdot \bar{F}(t).$$

Кроме того, можно показать, что функция готовности системы описывается соотношением:

$$K_r(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t \omega_B(\tau) F(t-\tau) d\tau,$$

где $\bar{F}(t)$ – вероятность безотказной работы элемента в течение времени t , а функция ω_B находится из уравнения

$$\omega_B(\tau) = f \cdot g(t) + f \cdot g \cdot \omega_B(t).$$

Получим общий вид изображения функции готовности. Для этого произведем преобразование Лапласа с параметром потока восстановлений, так как именно он характеризует функцию готовности:

$$\omega_B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{*(k)} \cdot g^{*(k)}(t) \rightarrow \hat{\omega}_B(z) = \frac{f(z) \cdot g(z)}{1 - f(z) \cdot g(z)}, \quad (1)$$

где z – оператор Лапласа, $f(z)$ и $g(z)$ – изображения плотности распределения времени безотказной работы и времени восстановления элемента.

В свою очередь изображение функции готовности имеет вид

$$K_r(z) = \frac{1 - f(z)}{z} \cdot (1 + \omega_B(z)). \quad (2)$$

Таким образом, подставив выражение (1) в соотношение (2), можно получить общий вид функции готовности, которая впоследствии будет использована для анализа влияния произвольных распределений отказов и восстановлений на нестационарные показатели:

$$K_r(z) = \frac{1 - f(z)}{z} \cdot \left(1 + \frac{f(z) \cdot g(z)}{1 - f(z) \cdot g(z)}\right) = \frac{1 - f(z)}{z \cdot (1 - f(z) \cdot g(z))}. \quad (3)$$

Следовательно, в форме прямого интегрального преобразования Лапласа выражение функции готовности имеет вид:

$$K_r(z) = \frac{1 - f(z)}{z \cdot (1 - f(z) \cdot g(z))}. \quad (4)$$

Далее выведем аналитические выражения функции готовности для некоторых часто встречающихся распределений.

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Если законы распределения имеют вид экспоненциальных зависимостей с параметрами λ и μ , то плотности распределения выражаются как:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad g(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}. \quad (5)$$

Выполним прямое преобразование Лапласа представленных выражений:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow f(z) = \frac{\lambda}{\lambda + z},$$

$$g(t) = \mu \cdot e^{-\mu t} \rightarrow g(z) = \frac{\mu}{\mu + z}. \quad (6)$$

Подставим выражения (5) в формулу (3):

$$K_r(z) = \frac{1 - \frac{\lambda}{\lambda + z}}{z \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + z} \cdot \frac{\mu}{\mu + z}\right)} = \frac{\mu + z}{(\lambda + z) \cdot (\mu + z) - \lambda \cdot \mu}. \quad (7)$$

Для получения явного вида уравнения функции готовности системы, соответствующей рассматриваемому случаю, представим выражение (7) в форме обратного преобразования Лапласа:

$$K_r(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (8)$$

Графики процессов, обладающих экспоненциальными законами распределения для безотказной работы и восстановления, изображены на рис. 1, из которого видно, что переходной процесс осуществляется довольно быстро при различных величинах параметров λ и μ .

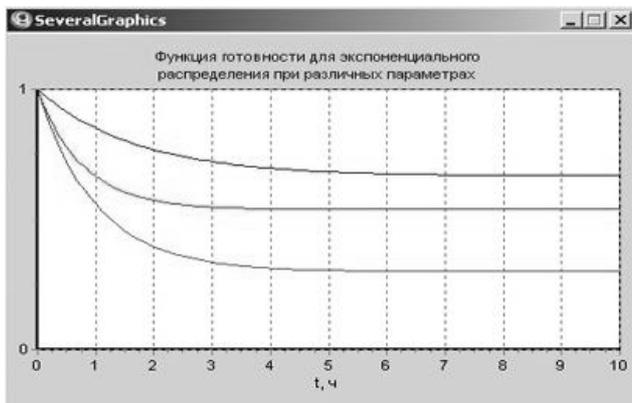


Рис. 1. Графики функции готовности вида (8).

Случай 2. Если закон распределения времени безотказной работы является экспоненциальным, а время восстановления описывается распределением Эрланга 2-го порядка с параметром μ , то на базе ранее представленных формул можно сформировать следующую зависимость:

$$K_r(z) = \frac{(z + \mu)^2}{z \cdot (z^2 + (2\mu + \lambda)z + \mu^2 + 2\lambda\mu)}. \quad (9)$$

Соответствующая функция готовности находится в явном виде аналогично вычислениям (5)-(7):

$$K_r(t) = \frac{\mu}{\mu + 2\lambda} + \left(\frac{2\lambda}{\mu + 2\lambda} \cdot \cos \beta t + \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{(\mu + 2\lambda)\beta} \cdot \sin \beta t \right) \cdot e^{-(\mu + \lambda/2)t}, \quad (10)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\lambda \cdot (4\mu - \lambda)}}{2}, \quad \mu > \frac{\lambda}{4}.$$

В свою очередь точки экстремума b_k могут быть определены в результате решения уравнения:

$$\operatorname{tg}(\beta b_k) = -\frac{2\beta}{2\mu - \lambda}.$$

Следовательно, точки экстремумов представляют собой

$$b_k = \frac{\pi k - \operatorname{arctg} \frac{2\beta}{2\mu - \lambda}}{\beta}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а функция $K_r(t)$ имеет их бесконечное число, т.е. соответствует колебательному процессу.

Например, для некоторого значения b_1 имеем:

$$K_r(b_1) = \frac{\mu}{\mu + 2\lambda} - \frac{\lambda}{\mu + 2\lambda} \cdot e^{\frac{2\mu + \lambda}{2\beta} \left(\pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{2\beta}{2\mu - \lambda} \right) \right)} < \frac{\mu}{\mu + 2\lambda} = K_r(\infty).$$

Иными словами, b_1 представляет собой точку минимума, в которой график функции готовности лежит ниже стационарного значения K_r . При этом значения a_k , в которых график рассматриваемой функции готовности пересекает линию $K_r(t) = K_r$, определяется из уравнения $K_r'(t) = 0$ как:

$$\operatorname{tg}(\beta b_k) = -\frac{2\beta}{2\mu - \lambda}.$$

Данное обстоятельство доказывает, что для произвольных распределений могут наблюдаться провалы функции готовности ниже ее стационарного значения. Для сравнительного рассмотрим графики 1-го и 2-го случаев на рис. 2.

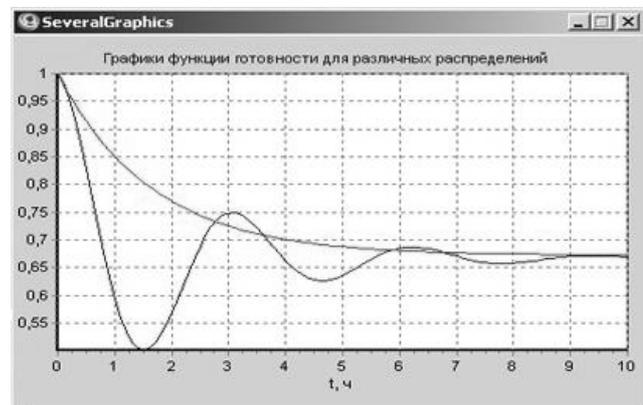


Рис. 2. Сравнительные графики функции готовности видов (8) и (10).

Для равномерного распределения с параметрами a и b преобразование Лапласа функции готовности имеет вид:

$$K_r(z) = \frac{1}{z + \lambda \left(1 - \frac{e^{-a} - e^{-bz}}{z(b-a)} \right)}. \quad (11)$$

В этом случае в явном виде найти функцию готовности не удастся. Тем не менее расчеты, выполненные с помощью авторского пакета прикладных программ, показывают достаточную близость функций готовности для равномерного распределения и распределения Эрланга.

Таким образом, в отличие от экспоненциального случая, т.е. тогда, когда функция готовности является монотонно убывающей, в общем случае функция готовности чаще всего имеет колебательный характер. Поэтому может оказаться, что готовность системы для небольшого времени эксплуатации будет меньше, чем при длительной эксплуатации.

Необходимо отметить, что данное обстоятельство, как правило, игнорируемое на практике, может привести к нежелательным последствиям.

Можно показать, что с уменьшением дисперсии времени безотказной работы элементов усиливается колебательный характер функции $K_r(t)$ и значительно увеличивается время наступления стационарного режима системы.

Случай 3. Если законы распределения являются вырожденными со средним T и T_B соответственно, то на базе

ранее представленных формул можно сформировать зависимость вида:

$$K_r(z) = \frac{1 - e^{-Tz}}{z(1 - e^{-(T+T_B)z})} = \frac{1 - e^{-Tz}}{z} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(T+T_B)z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k(T+T_B)z} - e^{-(k(T+T_B)+T)z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k(T+T_B)}^{k(T+T_B)+T} e^{-tz} dt.$$

Из представленного выражения следует, что функция $K_r(t)$ тождественно равна единице на интервалах $[k(T+T_B); k(T+T_B)+T]$, $k=0, 1, 2, \dots$, и равна нулю вне этих интервалов, т.е.:

$$K_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } k(T+T_B) < t \leq k(T+T_B)+T, \\ k=0, 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{если } k(T+T_B)+T < t \leq (k+1)(T+T_B), \\ k=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

График соответствующей функции готовности приведен на рис. 3.

Достаточно очевидно, что в этом случае стационарный режим не имеет места, а коэффициента готовности не существует.

На основании представленных результатов можно констатировать следующие выводы.

Для экспоненциальных распределений периоды восстановления элементов незначительно влияют на показатели надежности всей системы, особенно если ее функционирование протекает при дополнительном условии «быстрого» восстановления. Если же законы распределения оказываются не экспоненциальными, то процесс восстановления может оказать существенное влияние на надежность системы.

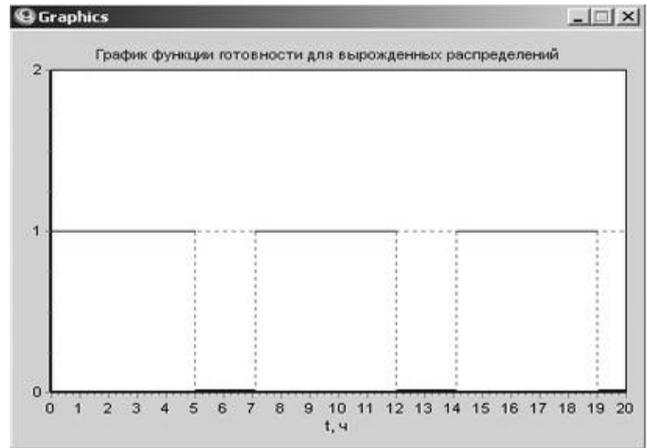


Рис. 3. Графики функции готовности вида (12).

ность системы. И система может вовсе не прийти в исправное состояние.

Иными словами, экспоненциальные законы распределения можно использовать только в том случае, когда потоки отказов и восстановлений являются простейшими, т.е. обладают свойством ординарности, стационарности и отсутствия последействия.

1. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
2. Острейковский В.А. Теория надежности. – М.: Высш. шк., 2008.
3. Александровская Л.Н., Афанасьев А.П., Лисов А.А. Современные методы обеспечения безотказности сложных технических систем. – М.: Логос, 2001.

Н.В. Кван, Н.П. Семичевская

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, БЫСТРОЙ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ И НАБЛЮДАТЕЛЕМ

This article is devoted a synthesis problem robust algorithms for control systems of a priori uncertain unstable nonlinear scalar objects containing delay, with use of stationary observer Ljuenbergera and quick-response is obvious-implicit reference model.

Введение

В данной работе предлагается при синтезе системы управления скалярным нелинейным объектом с запаздыванием использовать стационарный наблюдатель полного порядка и быстродействующую явно-неявную эталонную модель (БЭМ). Показано, что применение БЭМ повышает эффективность оценок переменных состояния и допускает упрощение технической реализации эталона.

Математические модели системы управления и постановка задачи

Пусть динамика нелинейно-нестационарного объекта управления с запаздыванием в пространстве состояний, действующего в условиях априорной параметрической неопределенности, описывается уравнениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_{\xi}(x, t, \tau) + bu(t) + f_{\xi}(t), \quad y(t) = L^T x(t) = x_1(t), \quad \xi \in \Xi, \quad (1)$$

где $x^T(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ – вектор состояния; $u(t), y(t)$ – скалярные управление и выход; t – положительное постоянное запаздывание при условии, что $x(q) = \varphi(q)$ при $-\tau \leq q \leq 0$, где $\varphi(q)$ – заданная начальная непрерывная

функция; $f_{\xi}^T(t) = [0, \dots, 0, f_n(t)]$ – возмущение; ξ – набор неизвестных параметров, принадлежащих известному множеству $\Xi, |f_n(t)| J f_0^2 = const; b^T = [0, \dots, 0, 1]$. Предполагается, что нелинейная векторная функция $A_{\xi}(x, t, \tau)$ представима в виде:

$$A_{\xi}(x, t, \tau) = A_{\xi}x(t) + b\alpha_{\xi}(x) + b\delta^T x(t - \tau), \quad (2)$$

где $A_{\xi} = A$ – некоторая стационарная матрица, для которой верно следующее представление:

$$A = A_M + b\chi_0^T, \quad (3)$$

где A_M – желаемая матрица, а χ_0 – некоторый вектор; $\alpha_{\xi}(x) = \alpha(x)$ – нелинейная скалярная функция, $\alpha_0^- \leq \alpha(t) \leq \alpha_0^+$; δ – некоторая векторная функция.

Пусть требуемая динамика БЭМ задана уравнениями

$$\frac{dz_M(t)}{dt} = a_0 z_M(t) + a_0 r(t), \quad y_M(t) = z_M(t), \quad (4)$$

где $z_M(t), y_M(t), r(t) \in R$ – соответственно эталонная переменная, выход и задающее воздействие; $a_0 = const > 0$ – достаточно большое число. Следуя [6], математическую модель БЭМ (4) можно представить следующим образом:

$$\frac{dx_M(t)}{dt} = A_M x_M(t) + br(t), \quad v_M(t) = y_M(t) = g^T x_M(t), \quad (5)$$

где $x_M(t) \in R^n$ – вектор состояния эталона; $v_M(t) \in R$ – обобщенный выход эталона. Очевидно, что передаточная функция БЭМ вида (4), приобретая новую форму записи, сохраняет прежнее значение

$$W_{БЭМ}(s) = g^T (sE - A_M)^{-1} b = \frac{g^T (sE - A_M)^+ b}{\det(sE - A_M)} = \frac{a_0}{s + a_0}.$$

Если теперь для системы управления (1), (2), (5) ввести